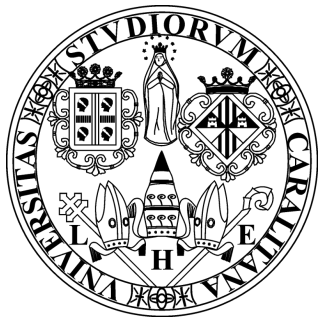


Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

Relatore:
Dott.ssa Delphine Perrodin

Candidato:
Matteo Pili
matr. 60/68/65200

Anno Accademico 2023/2024
Cagliari - 26/07/2024

Indice

1 Introduzione alla relatività generale **2**

1.1 Varietà differenziabili 3

1.2 Equazioni di Einstein 6

1.3 Soluzioni esatte alle equazioni di Einstein 7

1.4 Metodi di approssimazione 10

2 Pulsar Timing **13**

2.1 La tecnica del Pulsar Timing 13

2.2 Sistemi binari 16

2.2.1 Trattazione Kepleriana 17

2.2.2 Trattazione Post-Kepleriana 18

2.3 Shapiro Delay 22

2.3.1 Shapiro Delay - 1PN 22

2.3.2 Shapiro Delay - 2PN: Brumberg 25

2.3.3 Shapiro Delay - 2PN: Teyssandier 28

3 Buchi neri e Pulsar **33**

3.1 Buchi neri di Schwarzschild 34

3.2 Buchi neri di Reissner-Nordstrom 43

3.3 Possibili miglioramenti e idee future 47

4 Conclusioni **49**

Capitolo 1

Introduzione alla relatività generale

La teoria della Relatività Generale (GR) è universalmente riconosciuta come uno dei più eleganti modelli teorici di cui la fisica moderna dispone. Concepita da Albert Einstein agli inizi del XX secolo e poi ufficialmente pubblicata nel 1915 [8], la GR si propose come una teoria della gravitazione che superasse le idee Newtoniane.
Nelle prossime sezioni di questo capitolo daremo un rapido sguardo alle nozioni matematiche che sono necessarie per una completa comprensione della teoria, per poi descriverne sommariamente i risultati.
Introdurremo il concetto di *varietà differenziabile*, utile a compiere quel salto concettuale che ci porterà a definire la gravità non come una vera e propria interazione tra i corpi, bensì come una manifestazione della geometria dello spazio-tempo. Mostreremo dunque in cosa consistono le equazioni di Einstein, evidenziandone le principali peculiarità e descrivendo alcune delle soluzioni delle stesse, con particolare attenzione a quelle che verranno richiamate nel corpo di questa tesi.
In ultima battuta introdurremo una serie di principi matematici che ci aiutino in tutti quei casi in cui la risoluzione delle equazione della GR risulterebbe impossibile senza un'approssimazione delle stesse.

1.1 Varietà differenziabili

Il concetto matematico sul quale l'intera teoria della GR si fonda è quello di varietà differenziabile, il quale rappresenta il cardine della *geometria differenziale*.
Dato un insieme M e considerata una raccolta di suoi sottoinsiemi O_α, diremo che M è una *varietà differenziabile n-dimensionale* se[15]:

- Ogni punto $p \in M$ è parte di almeno uno dei sottoinsiemi O_α;
- Per qualsiasi α esiste una mappa biunivoca $\Psi : O_\alpha \to U_\alpha$, dove U_α è un sottoinsieme aperto $\mathbb{R}^n$;
- Se due sottoinsiemi O_α e O_β hanno un'intersezione non vuota, possiamo definire la mappa $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ che manda i punti in $\Psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ in punti in $\Psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$. Richiediamo inoltre che tutti questi sottoinsiemi siano aperti e tutte le mappe C^∞.

In altre parole, il concetto di varietà si propone come la generalizzazione di quello di curva (varietà unidimensionale) e quello di superficie (varietà bidimensionale): la caratteristica alla quale siamo più interessati è quella per cui, localmente, ogni varietà è si può approssimare con uno spazio euclideo. Si presti, inoltre, particolare attenzione a come l'ultima delle proprietà sopra elencate è quella che ci permette di definire come *differenziabile* la varietà in esame.
Un'ulteriore proprietà che potremmo includere (e sulla quale non spenderemo ulteriori parole) consiste nel richiedere che tutte le mappe Ψ sopra menzionate siano degli omeomorfismi [1]: questo garantirebbe la possibilità di costruire una topologia su M.

Siamo a questo punto in possesso di uno strumento sul quale costruire la teoria della GR: su di esso sarà possibile ridefinire tutte le nozioni legate al calcolo vettoriale e tensoriale. Un elemento di importanza capitale sul quale è necessario soffermarsi è la definizione del *tensore metrico*; per comprendere a

[1] Un omeomorfismo è una funzione continua e invertibile $f : X \to Y$, dove X e Y sono spazi topologici

fondo cosa questo concetto nasconda, possiamo rifarci al caso della geometria euclidea, considerando lo spazio $\mathbb{R}^3$: sappiamo infatti che, in questo caso, è possibile calcolare la distanza tra due punti con il solo ausilio del teorema di Pitagora. Nel caso specifico di due punti le cui coordinate cartesiane differiscono per quantità delle quantità infinitesime dx, dy e dz le differenze (infinitesime), definiamo il modulo quadro ds^2 della distanza tra i due come:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.1}$$

Possiamo allora generalizzare quanto visto finora introducendo il *tensore metrico* g_{ij}:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \tag{1.2}$$

che, nel caso euclideo:

$$g_{ij} = diag\,(1, 1, 1) \tag{1.3}$$

Il tensore metrico (o più semplicemente la *metrica*) rappresenta di fatto quell'insieme di istruzioni che ci guida nel calcolo della distanza tra due punti qualsiasi dello spazio studiato.
Nel caso della relatività speciale, ad esempio, sappiamo che la struttura geometrica di riferimento è lo spazio di *Minkowski*, il quale è descritto dalla metrica

$$g_{\mu\nu} = diag\,(-1, +1, +1, +1) \tag{1.4}$$

Definito il concetto di varietà differenziabile e chiarito il concetto di metrica, siamo allora pronti per definire l'idea principale alla base della GR: lo spazio-tempo è una varietà differenziabile di dimensione $n = 4$ la cui metrica punto per punto è determinata dalla distribuzione di massa sullo stesso.
Si noti come, sebbene gli esempi sopra citati non presentassero questa peculiarità, nulla vieta che il tensore metrico abbia delle componenti diverse a seconda del punto dello spazio studiato: altrimenti detto, non possiamo assumere a priori che l'algoritmo da utilizzare per il calcolo della distanza tra una coppia di punti sia il medesimo su tutte le regioni dello spazio in esame.
Resta ora da comprendere come sia possibile risalire alla forma del tensore metrico descrivente lo spazio-tempo in GR: sarà questo lo scopo delle equa-

zioni di Einstein.

Supposta nota la forma del tensore metrico, può risultare interessante indagare su quali siano le traiettorie di minima distanza tra due punti fissati: nasce così l'idea di *geodetica*. Le geodetiche, dunque, ricoprono nell'ambito di una varietà lo stesso ruolo che le linee rette ricoprivano nella geometria euclidea.

Rivediamo brevemente come si giunge alla determinazione delle geodetiche: dopo aver scelto due punti A e B, possiamo chiederci quanto sia lungo uno dei cammini γ che li congiunge: una semplice applicazione delle nozioni introdotte nel precedente paragrafo ci porta a ottenere il seguente risultato:

$$l = \int_\gamma ds = \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \tag{1.5}$$

dove abbiamo parametrizzato la curva γ in termini di una variabile λ rendendo poi esplicita tale dipendenza. λ_A e λ_B sono i valori del parametro λ che corrispondono ai due estremi del cammino.
Trovare le geodetiche, a questo punto, diventa un mero problema di calcolo delle variazioni: dovremo trovare quella curva che minimizza il risultato del suddetto integrale, cioè, dobbiamo richiedere che la *variazione* $\delta l = 0$. Una tale richiesta si traduce nella definizione di un set di quattro equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \tag{1.6}$$

Il simbolo $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ è noto come *simbolo di Christoffel* e, a discapito di quella che è l'apparenza, non rappresenta una grandezza tensoriale[2]; la sua espressione completa dipende dal tensore metrico e dalle sue derivate prime:

$$\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left\{ \partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\sigma g_{\rho\nu} \right\} \tag{1.8}$$

[2]Si ricordi che un tensore è definito come una struttura matematica con una precisa legge di trasformazione sotto cambiamenti di coordinate. Per un tensore ad indici controvarianti, ad esempio:

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\sigma} T^{\rho\sigma} \tag{1.7}$$

Leggi simili valgono per i tensori ad indici covarianti e per quelli ad indici misti

1.2 Equazioni di Einstein

Forti delle principali nozioni basilari, siamo finalmente pronti per affrontare il punto cruciale della GR: descrivere le equazioni che permetteranno di risalire al tensore metrico che descrive lo spazio-tempo.

Ribadiamo ancora una volta le idee chiave della teoria della relatività generale: lo spaziotempo Minkowskiano (piatto) verrà sostituito da una struttura più complessa, la cui curvatura è, in generale, non nulla e che si manifesta negli effetti gravitazionali che osserviamo. Un ruolo di primaria importanza è ricoperto dagli osservatori in caduta libera: questi descriveranno delle curve nello spaziotempo che coincidono proprio con le geodetiche dello stesso! E' dunque chiara a questo punto la motivazione per cui si consideri la gravità come un solo effetto geometrico: i suoi effetti, infatti, si manifestano come deviazioni dalla traiettoria geodetica che, altrimenti, tutti i corpi seguirebbero.
Senza ulteriori indugi, allora, riportiamo finalmente le equazioni di Einstein, provando a chiarirne il significato.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.9}$$

Il tensore di rango 2 che compare a primo membro è noto come *tensore di Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \tag{1.10}$$

$R_{\mu\nu}$ e R sono detti, rispettivamente *tensore di Ricci* e *scalare di Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\sigma} + \Gamma^\sigma_{\sigma\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} \tag{1.11}$$

$$R = R^\mu_\mu \tag{1.12}$$

A secondo membro, invece, troviamo il tensore energia-impulso.
Si presti particolare attenzione al fatto che, quindi, tali equazioni mettono in relazione una quantità legata unicamente alle caratteristiche geometriche del sistema ($G_{\mu\nu}$) con una quantità che invece descrive la distribuzione di massa e di energia nel medesimo sistema ($T_{\mu\nu}$).

Un ultimo aspetto che è bene rimarcare è l'incredibile efficacia del formalismo covariante: non ci si deve, infatti, lasciar ingannare dall'apparente semplicità delle (1.9): anche con la conoscenza completa di $T_{\alpha\beta}$, trovare l'espressione per il tensore metrico richiederebbe la risoluzione di un set di dieci equazioni differenziali alle derivate parziali accoppiate.

1.3 Soluzioni esatte alle equazioni di Einstein

Vista la complessità delle equazioni (1.9), risulta necessaria una breve digressione su come un tale problema, apparentemente insormontabile, possa essere aggirato o, quantomeno, semplificato. In questa sezione ci occuperemo di proporre due possibili soluzioni alle equazioni di Einstein, nei casi in cui queste presentano delle enormi semplificazioni date dalle condizioni al contorno.

Seguendo [4] mostreremo come è possibile ottenere la soluzione che Karl Schwarzschild [13] presentò nel 1916, un intero anno dopo che la teoria della GR venne rese pubblica.

La metrica che ricaveremo descrive lo spazio (vuoto) circostante ad una massa M che considereremo, senza perdita di generalità, posizionata nell'origine del sistema di riferimento. Il fatto che la nostra analisi sia limitata alla porzione di spazio nella quale non è presente alcuna massa si traduce matematicamente nell'assumere che $T_{\mu\nu} = 0$ Le equazioni (1.9) si riducono allora a:

$$G_{\mu\nu} = 0 \tag{1.13}$$

o, secondo quanto visto nella (1.10):

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1.14}$$

La seconda assunzione della quale ci serviremo sarà la *staticità* dello spaziotempo: in altre parole, ricercheremo delle soluzioni tali per cui ogni entrata della metrica sia indipendente dalla coordinata temporale ct; un'ulteriore conseguenza di questo fatto risulta essere l'assenza di termini misti del tipo

$dx^i dt$, che renderebbero la metrica non invariante per inversioni temporali. Ci avvarremo infine di un'ultima condizione, legata all'isotropia dello spazio, che si tradurre nella richiesta che la metrica sia invariante per rotazioni spaziali:

$$ds^2 = -A(r)c^2dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.15}$$

Si può dimostrare in pochi passaggi [4] che è sempre possibile effettuare una riparametrizzazione della coordinata radiale r tale per cui sia soddisfatta la relazione $C(r) = 1$:

$$ds^2 = -A(r)c^2dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.16}$$

A questo punto non resta che procedere con il calcolo del tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ (il quale presenterà una dipendenza esplicita dai coefficienti $A(r)$ e $B(r)$), richiedendo che siano soddisfatte le equazioni di Einstein. Una tale procedura, a dire il vero, porterà ad un risultato finale che dipende da una costante non determinabile univocamente tramite questa procedura; detta quest'ultima R_S, si avra:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{1.17}$$

Si noti tuttavia che, finora il ragionamento descritto è di tipo puramente matematico: non abbiamo cioè fissato nessuna condizione al contorno dettata dalla fisica del sistema; si può allora pensare di confrontare l'equazione (1.17) con i risultati validi nell'approssimazione di campo debole, ovvero quelli forniti dal formalismo Newtoniano. Questa considerazione ci permetterà di ottenere quella che è la forma finale per la *metrica di Schwarzschild*:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{1.18}$$

dove G è la costante di gravitazione universale, M è la massa del corpo collocato nell'origine del sistema di riferimento e abbiamo indicato con $d\Omega^2$ l'angolo solido.

Nel seguito riscriveremo spesso la metrica in funzione di un parametro che denomineremo *massa di Schwarzschild*, la cui espressione è data da

$$m = \frac{GM}{c^2} \tag{1.19}$$

Si noti come la metrica presenti due singolarità, rispettivamente nel punto $r = 0$ e sulla superficie con coordinata radiale $r = 2GM/c^2$. Sebbene la prima sia una singolarità alla quale inevitabilmente si giunge nel costruire la teoria, la seconda è il solo risultato della nostra scelta del sistema di riferimento: un'opportuna ridefinizione delle coordinate, infatti, potrebbe portarci ad una metrica che non abbia alcun tipo di comportamento patologico in $r = 2GM/c^2$. Tale valore, noto come *raggio di Schwarzschild*, rappresenta una superficie di "non ritorno": un osservatore che si trovasse ad attraversarla non potrebbe più invertire la sua rotta, ma sarebbe destinato a procedere inerte nel suo moto fino a raggiungere la singolarità in $r = 0$. Al contrario, nel sistema di riferimento di un osservatore infinitamente distante, non sarà mai possibile osservare alcun oggetto attraversare quella barriera: ai suoi occhi, la velocità di chi si avvicina al raggio di Schwarzschild diminuisce asintoticamente, senza che questi riesca mai a superare tale barriera.

Le soluzioni alle equazioni di Einstein note sono ormai svariate: di seguito ci proponiamo di presentarne solo un'altra, relativa ai buchi neri che abbiano una carica elettrica Q. La metrica in oggetto, che prende il nome dai fisici Hans Reissner e Gunnar Nordström che per primi la scoprirono, differisce da quella di Schwarzschild per la sola presenza di un termine aggiuntivo:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.20}$$

Si noti come, a differenza della metrica di Schwarzschild, compare un termine proporzionale a r^{-2}; nel limite in cui la carica $Q \to 0$, riotteniamo quanto trovato precedentemente nella (1.18).

Sebbene le due metriche sembrino molto simili tra loro, è opportuno sottolineare che lo spazio-tempo di Reissner-Nordström può avere (a seconda della relazione che lega M e Q) un doppio orizzonte degli eventi.
Una ricerca dei punti di singolarità per la metrica mostra subito che, i coefficienti $A(r)$ e $B(r)$ presentano un comportamento singolare nelle superfici con coordinate radiali date da:

$$r_\pm = \frac{1}{2}\left(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4r_Q^2}\right) \tag{1.21}$$

dove abbiamo definito

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \qquad r_Q^2 = \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4} \tag{1.22}$$

Si noti come i due orizzonti degli eventi si "uniscano" nel caso in cui $2r_Q = r_s$: si parla in tal caso di *buco nero estremale*. Nel momento in cui, invece, si dovesse avere $2r_Q > r_s$, la metrica RN non presenterebbe alcun orizzonte (il termine sotto radice nella (1.22) diventa negativa) portando ad avere una singolarità nuda: per questo motivo, spesso si evita di considerare uno scenario di questo tipo.

1.4 Metodi di approssimazione

Come più volte ribadito nelle pagine precedenti, la teoria della Relatività Generale è particolarmente complessa da affrontare dal punto di vista matematico; alcuni metodi di approssimazione furono sviluppati già a partire dal 1916 dallo stesso Einstein, ma anche da Droste, de Sitter e Lorentz.
Una delle approssimazioni che vedremo ora e che poi riprenderemo nel prossimo capitolo, è la cosiddetta approssimazione Post-Newtoniana: questa consiste nel considerare tutti quei casi in cui vi siano delle masse in moto, le cui velocità siano però trascurabili rispetto a quella della luce; l'idea sarà allora quella di definire un parametro $\epsilon = v/c << 1$ intorno al quale espandere le equazione della GR. Nel seguito supporremo inoltre che il sistema di masse considerato sia legato dalle interazioni gravitazionali: per il teorema del viriale, questo implicherà che $\sqrt{R_S/d} \approx v/c$.

Possiamo così procedere ad una espansione in serie del tensore metrico e del tensore energia-impulso; particolare attenzione va data all'ordine in ϵ che i vari termini dovranno avere. Si noti infatti che, supposto che i corpi in esame non emettano radiazione, il sistema debba essere invariante per inversione temporale. Sapendo che g_{00} e g_{ij} sono pari sotto tale inversione, mentre g_{0i} è dispari, e sapendo che v è anch'essa dispari, questo vincola g_{00} e g_{ij} a contenere solamente termini del tipo v^{2n}, mentre g_{0i} ad avere solamente termini v^{2n+1}.
Il corretto sviluppo sarà cioè del tipo[12]:

$$g_{00} = -1 + g_{00}^{(2)} + g_{00}^{(4)} + g_{00}^{(6)} + \dots \tag{1.23}$$

$$g_{0i} = g_{0i}^{(3)} + g_{0i}^{(5)} + \dots \tag{1.24}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \dots \tag{1.25}$$

Fatti presente i dettagli ai quali prestare maggiore attenzione, possiamo allora pensare di analizzare un caso che più avanti analizzeremo nel dettaglio, ovvero quello di un sistema a due corpi. Al sistema in oggetto può essere associata una Lagrangiana che dipende dalle masse m_1 e m_2 dei due corpi e dalle loro velocità v_1 e v_2. Aver espanso le equazioni di Einstein come indicato dall (1.23) porterà ad una funzione nota come *Lagrangiana di Einstein - Infeld - Hoffmann*.

$$L = L_0 + \frac{1}{c^2} L_2 \tag{1.26}$$

dove L_0 è il contributo classico, già ottenibile dalle equazioni di Newton, mentre L_2 è la correzione al primo ordine post-newtoniano.

$$L_N = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + G \frac{m_1 m_2}{R} \tag{1.27}$$

$$L_2 = \frac{1}{8} \left(m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4 \right) + G \frac{m_1 m_2}{2R} \left(3v_1^2 + 3v_2^2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} - v_1 v_2 - G \frac{m_1 + m_2}{R} \right) \tag{1.28}$$

Si noti come tale approssimazione non vada confusa con l'espansione *post Minkowskiana* (PM): in questo caso, infatti, la semplificazione adoperata risiede nella possibilità di considerare come "deboli" gli effetti dovuti alla gravità, senza però porre alcun tipo di limitazione alla velocità dei corpi che compongono il sistema. In questo caso dunque, il termine intorno al quale lo sviluppo verrà effettuato sarà $\epsilon' \approx M/r$, il quale decreta l'intensità del campo gravitazionale. Per la metrica di Schwarzschild, ad esempio, un tale sviluppo al primo ordine risulterà nell'espressione seguente:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1.29}$$

Si noti come, sebbene le due approssimazioni siano formalmente piuttosto differenti, talvolta si tende a utilizzarne i nomi interscambialmente: per

questo motivo, oltre che per uniformarci alla letteratura, molto spesso definiremo come post-Newtoniane delle approssimazioni che invece saranno di natura post-Minkowsiana.

Capitolo 2

Pulsar Timing

2.1 La tecnica del Pulsar Timing

Il pulsar timing è una tecnica che sfrutta l'estrema costanza nella rotazione della pulsar intorno al proprio asse: l'obiettivo che ci si propone di ottenere è quello di misurare i tempi di arrivo dei diversi impulsi luminosi emessi dalla stella (TOAs, *time of arrivals*); un'appropriata analisi di questi dati sarà poi in grado di fornire una stime della frequenza di rotazione della pulsar. Il punto cruciale di tale operazione risulta essere la correzione dei dati, volta all'eliminazione di tutte quelle possibili fonti di contaminazione del segnale che nulla hanno a che fare con la rotazione della pulsar.
Nelle prossime righe, seguendo principalmente [11] tenteremo di dare una descrizione di quali siano i più rilevanti aspetti da tenere in considerazione e di come si possa operare in tal senso una modifica dei dati grezzi.

Uno dei primi aspetti che vale la pena menzionare è sicuramente l'influenza del moto della terrestre intorno al Sole, il quale porterà ad una modulazione del segnale che, naturalmente, non ha nulla a che fare con le caratteristiche della pulsar. Per eliminare tale dipendenza, si sceglie di convertire il set di dati di modo tale da ottenere dei TOAs valutati nel baricentro del sistema solare (SSB, *Solar System Barycenter*): si tenta cioè di risalire a quali tempi di arrivo sarebbero stati rilevati nel caso in cui l'osservatorio si fosse trovato nel SSB. Il vantaggio di una simile trattazione è duplice: da un lato viene facilitata l'operazione di confronto tra i dati ottenuti da diversi osservatori

sul pianeta, dall'altro si rende possibile anche un'analisi che coinvolga misurazioni effettuate in epoche diverse. Detti allora T_{topo} i tempi effettivamente misurati e T_{SSB} i corrispettivi dati valutati nel SSB, la trasformazione da effettuare è della forma:

$$t_{SSB} = t_{topo} + t_{corr} - \Delta D/f^2 + \Delta_R + \Delta_S + \Delta_E. \tag{2.1}$$

Ci proponiamo dunque di fornire una breve spiegazione che descriva tutti i termini presenti nella (2.1).

L'introduzione del termine $\Delta D/f^2$ si rende necessaria per tenere in considerazione gli effetti di dispersione dovuti al mezzo interstellare. E' infatti noto che i TOAs siano dipendenti dalla frequenza f alla quale gli impulsi vengono osservati, poiché l'effetto del mezzo interstellare non è il medesimo per fotoni aventi frequenza differente. Ciò che si è soliti fare, dunque, consiste in una simultanea traslazione di tutti i TOAs a frequenza infinita.
Il termine ΔD che compare nell'equazione è dato da:

$$\Delta D = \mathcal{D} \times DM \tag{2.2}$$

dove abbiamo definito la *costante di dispersione* $\mathcal{D}$ data da:

$$\mathcal{D} = \frac{e^2}{2\pi m_e c} \tag{2.3}$$

mentre DM è la cosidetta *misura di dispersione*, data da:

$$DM = \int_0^d n_e dl \tag{2.4}$$

ove n_e è la densità di elettroni lungo il percorso compiuto dal raggio luminoso, mentre $l = 0$ e $l = d$ sono i punti estremi della traiettoria.

Il termine Δ_R è noto come *Roemer Delay* e la sua introduzione è dettata dalla necessità di eliminare l'influenza che il moto terrestre avrebbe sul set di TOAs: il percorso tracciato dai raggi luminosi che vengono emessi dalla pulsar sarà infatti diverso a seconda del periodo dell'anno in cui l'osservazione viene compiuta; una tale modulazione del segnale può allora essere eliminata introducendo un termine correttivo:

$$\Delta_R = -\frac{1}{c}\,\vec{r}\cdot\hat{s} = -\frac{1}{c}\,(\vec{r}_{SSB} + \vec{r}_{EO})\cdot\hat{s} \tag{2.5}$$

dove $\vec{r}_{SSB}$ è un vettore che punta dal centro del sistema solare al centro della Terra; $\vec{r}_{EO}$, invece, punta dal centro della Terra al luogo in cui l'osservatorio è situato; $\hat{s}$, infine, punta dal centro del sistema solare verso la pulsar.

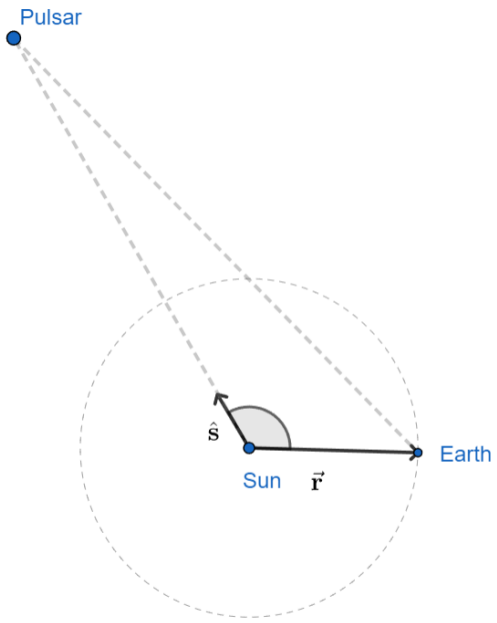


Figura 2.1: Rappresentazione grafica dei termini descritti nella (2.5).

Il termine successivo, Δ_S, è noto come *Shapiro Delay* e la sua presenza è una conseguenza diretta della teoria della relatività generale: la misura di tale parametro si colloca per questo motivo tra i quattro test classici della teoria Einsteniana.
L'introduzione di tale correzione si rende necessaria poiché i raggi luminosi, nel giungere fino alla Terra, saranno inevitabilmente soggetti all'influenza del campo gravitazionale dei corpi vicino ai quali transiteranno nel loro percorso. Limitando ancora una volta la trattazione al caso delle pulsar isolate, l'effetto più rilevante verrà misurato all'interno del sistema solare, per via del campo gravitazionale del Sole: talvolta, a seconda della precisione raggiunta nelle misure si rende necessario considerare anche la presenza di Giove e dei più massivi pianeti del sistema solare. L'effetto apparente è quello di una diminuizione della velocità della luce (nel sistema di riferimento terrestre).

La formula da impiegare, che deriveremo nel prossimo paragrafo, è data dalla seguente relazione:

$$\Delta_S = \frac{2GM}{c^2} \ln\left(\frac{r_P + r_E + R_{PE}}{r_P + r_E - R_{PE}}\right), \tag{2.6}$$

dove r_P e r_E sono rispettivamente le distanze della pulsar e della Terra dal Sole, mentre R_{PE} è la distanza tra la pulsar e la Terra. Tale espressione è valida solamente al primo ordine Post-Newtoniano: risulta quindi essere adatta al transito dei fotoni in prossimità del Sole, il cui campo gravitazionale sulla superficie è sufficientemente debole da potersi avvalere di tale approssimazione.

Infine, l'ultimo aspetto da tenere in considerazione è l'effetto di dilatazione temporale dovuto al moto relativo tra la pulsar e la Terra: per questo si rende necessaria l'introduzione del cosiddetto *Einstein Delay* Δ_E. Un orologio che si trovi sul sistema di riferimento terrestre, infatti, misurerà un tempo proprio che, al primo ordine post-Newtoniano è dato da[1]:

$$c^2 d\tau^2 = -\left(1 + 2\phi(\boldsymbol{x_{obs}})\right) c^2 dt^2 + \left(1 + 2\phi(\boldsymbol{x_{obs}})\right) d\boldsymbol{x}^2 \tag{2.7}$$

che se integrata porta a:

$$\tau = t - \int_0^{t'} \left(\phi + \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \tag{2.8}$$

2.2 Sistemi binari

Un caso di studio piuttosto interessante è quello in cui la pulsar non è isolata, ma è parte di un sistema binario. La presenza di un secondo corpo nei pressi della stella si manifesta in un'ulteriore modulazione del segnale che richiede l'introduzione di una serie di contributi simili ai Δ_R, Δ_S e Δ_E precedentemente descritti. Nel caso del Roemer Delay, ad esempio, sarà necessario considerare l'effetto apportato dal moto della pulsar intorno al centro di massa del sistema binario.

Il problema può essere notevolmente semplificato nell'evenienza in cui gli effetti relativistici siano trascurabili: in tal caso è possibile limitarsi all'utilizzo del formalismo Kepleriano, almeno nello studio della forma dell'orbita.

In caso contrario, sarà necessario considerare anche gli effetti dei cosiddetti *parametri post Kepleriani*. Nel seguito tratteremo separatamente entrambe le casistiche.

2.2.1 Trattazione Kepleriana

Nel caso in cui gli effetti relativistici non siano considerevoli, la trattazione può essere ricondotta ad una applicazione delle leggi di Newton che, come è ben noto, nell'ambito della meccanica celeste conducono alle tre *leggi di Keplero*.
Per questo motivo definiremo *Kepleriani* i parametri che costituiscono quel set di sei variabili che sono necessarie per descrivere completamente lo stato del sistema binario.

- Periodo orbitale (P_b): rappresenta il tempo impiegato dalla pulsar a tracciare un orbita completa intorno al centro di massa del sistema di cui fa parte;
- Proiezione del semiasse maggiore ($a_p \sin \hat{i}$): detta a_p la lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse descritta dalla pulsar, siamo interessati alla sua proiezione sul piano perpendicolare alla linea di vista dell'osservatore;
- Eccentricità dell'orbita (e);
- Longitudine del periastro (ω): descrive la posizione, nel sistema di riferimento dell'osservatore, del punto dell'orbita in cui i due corpi sono a distanza minima;
- Tempo di passaggio al periastro (T_0)
- Posizione angolare del nodo ascendente (Ω_{asc})

Talvolta si preferisce descrivere lo stato del sistema introducendo due parametri che sono noti come *Anomalia eccentrica* (u) e anomalia vera *Anomalia vera* (A_T) (si veda la figura ((3.5)), che riutilizzeremo nella scrittura di una soluzione per il problema a due corpi.

In questa sede non ci occuperemo di mostrare come si arrivi alla soluzione che tra poco riporteremo: descriveremo invece sommariamente le equazioni principali di cui fare uso nel seguito.
Dopo aver notato che la funzione Lagrangiana che descrive il sistema non è funzione esplicita né del tempo né di alcuna variabile angolare, concludiamo che l'energia E e il momento angolare J siano due costanti del moto: è dunque possibile spostare la trattazione su un sistema di riferimento che abbia l'origine nel centro di massa e ridurre il problema alla risoluzione di un unica equazione differenziale che abbia come incognita una variabile ausiliaria di natura vettoriale $\boldsymbol{R}(t)$ che descriva la distanza tra i due corpi: formalmente tale procedura permette di trattare il sistema come se si avesse un unico corpo di massa ridotta $\mu = m_1 m_2 / M_{TOT}$ che è sottoposto ad una forza centrale.

Le equazioni così ottenute sono della forma:

$$\left(\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\right)^2 = A + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{r^2} \tag{2.9}$$

dove per comodità abbiamo definito le costanti $A = 2E$ $B = GM$ $C = -J^2$

Le soluzioni dell'equazione sono le seguenti:

$$R = a\,(1 - e\cos u) \tag{2.10}$$

$$\theta - \theta_0 = A_e(u) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}\right) \tag{2.11}$$

$$n(t - t_0) = u - e\sin(u). \tag{2.12}$$

La prima espressione mostra che la traiettoria è ellittica; nella terza, invece abbiamo definito la costante $n = \sqrt{B/a^3}$: di fatto la (2.12) non è altro che la terza legge di Keplero.

2.2.2 Trattazione Post-Kepleriana

Nel caso in cui gli effetti relativistici non siano trascurabili, la trattazione precedente non rappresenta una descrizione sufficientemente accurata del sistema. La prima difficoltà che si incontra nella risoluzione del problema

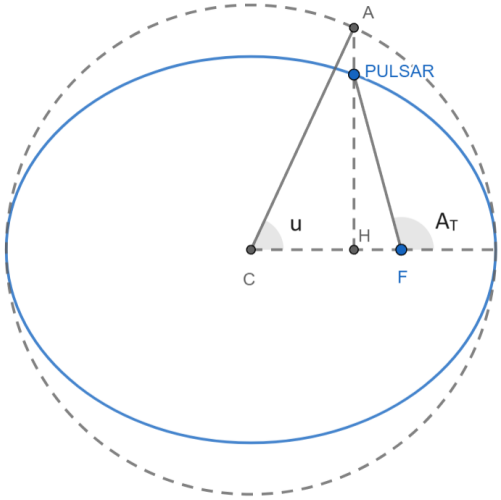


Figura 2.2: Definizione della anomalia vera e della anomalia eccentrica

nell'ambito della relatività generale è legata all'intrinseca complessità delle equazioni di Einstein: questo impedisce, in prima battuta, di trovare una soluzione esatta per il problema a due corpi. Sarà allora necessario affrontare il problema con un certo grado di approssimazione.
Nelle prossime righe (riportando quando fatto in [6]) mostreremo come è possibile trattare il problema al primo ordine post-newtoniano e come si renda necessaria l'introduzione di alcuni parametri aggiuntivi rispetto ai sei che abbiamo menzionato poc'anzi.

Il punto di partenza sarà ovviamente la funzione Lagrangiana precedentemente ricavata e riportata nella (1.26) che ricordiamo essere data da:

$$L = L_N(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) + \frac{1}{c^2} L_2(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}) \tag{2.13}$$

dove

$$L_N = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + G\frac{m_1 m_2}{R} \tag{2.14}$$

$$L_2 = \frac{1}{8}\left(m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4\right) + G\frac{m_1 m_2}{2R}\left(3v_1^2 + 3v_2^2 - \mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2} - v_1 v_2 - G\frac{m_1 + m_2}{R}\right), \tag{2.15}$$

dove abbiamo indicato con R la distanza tra i due corpi.

Questa Lagrangiana risulta essere invariante per traslazioni e per boost di Lorentz. Questo implica la presenza di due quantità conservate:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v_1}} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v_2}} \qquad\qquad \mathbf{K} = \mathbf{G} - t\mathbf{P} \tag{2.16}$$

dove abbiamo definito

$$\mathbf{G} = \sum_i \left(m_i + \frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \frac{G m_1 m_2}{R c^2} \right) \mathbf{r_i} \tag{2.17}$$

Queste non sono altro che gli equivalenti relativistici (ad ordine 1PN) della quantità di moto e del centro di massa.
Sulla falsa riga di quanto fatto nel precedente paragrafo è dunque possibile, mediante un boost di Lorentz, spostarsi sul sistema di riferimento del centro di massa, in cui $\mathbf{K} = \mathbf{P} = 0$. Le nuove coordinate dei due corpi sono allora date da:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu}{m_1}\mathbf{R} + \frac{\mu\,(m_1 - m_2)}{2M^2c^2}\left(V^2 - \frac{GM}{R}\right)\mathbf{R} \tag{2.18}$$

$$\mathbf{r}_2 = -\frac{\mu}{m_2}\mathbf{R} + \frac{\mu\,(m_1 - m_2)}{2M^2c^2}\left(V^2 - \frac{GM}{R}\right)\mathbf{R}, \tag{2.19}$$

dove le grandezze indicate in maiuscolo (R e V) sono rispettivamente la posizione e la velocità relative.
Si può dimostrare [6] che il moto relativo dei due corpi può essere studiato a partire da una Lagrangiana L^R_{PN} che ha la forma seguente:

$$L^R_{PN} = \frac{1}{2}V^2 + \frac{GM}{R} + \frac{1}{8}\,(1 - 3\nu)\,\frac{V^4}{c^2} + \frac{GM}{2Rc^2}\left[(3 + \nu)\,V^2 + \nu(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{V})^2 - \frac{GM}{R}\right] \tag{2.20}$$

dove abbiamo definito $\nu = \mu/M$.

Le equazioni del moto che derivano da una tale Lagrangiana possono essere ricavate in modi diversi: quello più rapido consiste nello sfruttare nuovamente le simmetrie della (2.20).
Notiamo infatti che non c'è una dipendenza esplicita dal tempo, tantomeno da variabili angolari: ne consegue che l'energia e il momento angolare siano conservati.

La conservazione del momento angolare, peraltro, implicherà che l'orbita descritta dai due corpi giacia interamente su un piano, proprio come accadeva nel caso Kepleriano: possiamo allora introdurre su quest'ultimo delle coordinate polari (r, φ) in funzione delle quali risolvere il problema.
Le equazioni che ne derivano sono allora le seguenti:

$$\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)^2 = A + \frac{2B}{R} + \frac{C}{R^2} + \frac{D}{R^3} \tag{2.21}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{R^2} + \frac{I}{R^3} \tag{2.22}$$

dove i coefficienti A,B,C,D,H e I sono funzioni delle costanti del sistema (si veda l'Appendice).

La risoluzione delle equazioni per il moto radiale può essere completata per similitudine con quanto ottenuto nel caso Kepleriano: in quell'occasione, infatti, le equazioni mancavano di un termine proporzionale a R^{-3}. Per ricondurci a quanto visto precedentemente si può effettuare una sostituzione del tipo:

$$R = \bar{R} + \frac{2D}{C_0} \tag{2.23}$$

dove $C_0 = -J^2$.
In questo modo l'equazione risultante è formalmente identica al caso Kepleriano (con una differenza nei soli valori delle costanti) e la cui risoluzione porterà alle seguenti equazioni per il moto:

$$n\,(t - t_0) = u - e_t \sin u \tag{2.24}$$

$$R = a_R\,(1 - e_R \sin u)\,. \tag{2.25}$$

Per analogia con il caso precedente abbiamo riscritto la (2.24) nella stessa forma del caso non relativistico, sebbene la costante n abbia un valore diverso.

La prima delle due equazioni ci permette di determinare il modo in cui varia l'anomalia eccentrica al passare del tempo. La seconda, invece, è indipendente dal tempo e mostra la forma dell'orbita che, ancora una volta, è un'ellisse.
L'aspetto rilevante di queste equazioni risulta essere la presenza di due diversi parametri di eccentricità: una di tipo "temporale" e una di tipo "radiale".

Nel caso Newtoniano, sebbene le due espressioni fossero formalmente identiche, i due parametri di eccentricità coincidevano.

Per la parte angolare la trattazione segue la stessa linea: ancora una volta il termine proporzionale a R^{-3} è una novità del caso relativistico; sulla falsa riga di quanto visto per il moto radiale, una trasformazione delle coordinate sarà necessaria per ricondursi a quanto già noto nella trattazione Kepleriana. Posto allora $R = \widetilde{R} + I/2H$, si torna nuovamente ad una equazione simile alla (2.22).
Si trova così che:

$$\theta - \theta_0 = \frac{\Phi}{2\pi} A_{e\theta} \tag{2.26}$$

dove Φ è una funzione delle costanti del moto e dove la funzione A_{e_θ} è la stessa che avevamo definito nella (2.11).

La conseguenza evidente di quest'ultima equazione è la presenza di una costante moltiplicativa per $A_{e\theta}$ che differisce da uno: questo implicherà la presenza di un moto di precessione del perielio.

2.3 Shapiro Delay

A questo punto della trattazione, risulta necessario uno studio piuttosto approfondito dello Shapiro delay. Nella prossima sezione, ci proporremo di ottenere un espressione che sia valida nel caso di un sistema binario e nell'approssimazione 1PN. Dopodiché procederemo ad una generalizzazione dello stesso, mostrando quali siano le differenze incontrate nel passaggio all'ordine successivo

2.3.1 Shapiro Delay - 1PN

Il calcolo dello Shapiro Delay al primo ordine post-Newtoniano è piuttosto semplice da trattare e può essere affrontato secondo modalità differenti. Essendo interessati prevalentemente agli effetti gravitazionali sulla propagazione della luce, ignoreremo momentaneamente le complicazioni date dalla particolare forma dell'orbita, che abbiamo già discusso nel paragrafo prece-

dente. Per questo motivo, tratteremo per semplicità il caso di una pulsar in orbita circolare intorno ad un oggetto compagno. Verrà inoltre assunto che il piano dell'orbita contenga anche l'osservatore. Fisseremo inoltre l'origine del sistema di riferimento in corrispondenza del compagno della pulsar.

Il fatto che il campo gravitazionale dell'oggetto compagno sia debole si traduce nella possibilità di espandere la metrica di Schwarzschild intorno al parametro m/r:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) d\vec{x}^2 \tag{2.27}$$

Si noti che la metrica risulta quindi essere una versione "modificata" di quella di Minkowski: l'unico aspetto per il quale le due differiscono è la presenza del termine proporzionale a m/r che, peraltro, è riscrivibile in funzione del potenziale gravitazionale newtoniano. Si ha cioè:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\vec{x}^2 \tag{2.28}$$

A questo punto è possibile implementare la condizione per le geodetiche nulle:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{2.29}$$

la quale conduce immediatamente a:

$$\begin{aligned} -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\vec{x}^2 &= 0 \\ cdt = \sqrt{\frac{1 - 2\Phi/c^2}{1 + 2\Phi/c^2}} |d\vec{x}| &\approx \left(1 - 2\Phi/c^2\right) |d\vec{x}| \end{aligned}$$

Quest'equazione può facilmente essere integrata:

$$\begin{aligned} c\left(t_a - t_e\right) &= \int_{r_e}^{r_a} \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) |d\vec{x}| \\ &= \int_{r_e}^{r_a} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) |d\vec{x}| \end{aligned} \tag{2.30}$$

dove r_e e r_a identificano il punto di emissione del fotone e il punto in cui viene osservato (i.e. la posizione della Terra).
Risolvere quest'integrale è un processo lungo ma non complesso. Si presti

attenzione in particolare al fatto che la variabile r al denominatore è la distanza che, istante per istante, separa il fotone dal compagno della pulsar. $|d\vec{x}|$ invece è il tratto infinitesimo percorso dal fotone stesso: la risoluzione dell'integrale sarà dunque facilitata da una parametrizzazione del percorso compiuto dal fotone, che a questo grado di approssimazione è semplicemente una linea retta.
Il risultato finale è il seguente:

$$c\,(t_a - t_e) = |\vec{r}_a - \vec{r}_e| + \frac{2m}{c^2} \ln\left(\frac{r_e + r_a + R}{r_e + r_a - R}\right), \tag{2.31}$$

dove R è la distanza totale percorsa dal fotone, ovvero la distanza tra la Terra e la pulsar.
Si noti come il primo termine non è altro che la distanza euclidea tra il punto in cui il fotone è emesso e quello in cui si trova il compagno della pulsar: per come esso è stato costruito, quindi, include già al suo interno il contributo al Roemer Delay dato dal moto circolare della stella.
Il secondo termine invece, è quello che chiamiamo Shapiro Delay: il suo effetto si manifesta in un "rallentamento" della luce per effetto del compagno della pulsar; l'effetto è tanto più intenso quanto maggiore è M. Si presti comunque attenzione al fatto che tale formula può essere applicata solo nel caso di potenziale gravitazionale debole.
Una peculiarità di tale risultato è data dal fatto che l'espressione ottenuta non sia definita nel caso in cui la pulsar emetta il fotone quando si trova in opposizione rispetto al compagno. In quel caso, infatti, approssimando la traiettoria del fotone con una linea retta, quest'ultimo si troverebbe ad attraversare una regione in cui non è più valida l'approssimazione di campo debole.

La generalizzazione dei risultati precedenti al secondo ordine Post-Newtoniano non può essere effettuata in maniera simile a quanto appena visto; nelle prossime sezioni presenteremo due diverse procedure che si potrebbero implementare, mostrando come entrambe giungano allo stesso risultato.

2.3.2 Shapiro Delay - 2PN: Brumberg

La prima tecnica si basa su un approccio di natura perturbativa, presentato per la prima volta da V.Brumberg [2] e ripresa poi anni dopo da S.Zschoke e S.Klioner [10][16]. Nel seguito ci riferiremo al procedimento seguito da questi ultimi; il punto di partenza è la soluzione di Schwarzschild nella cosiddetta gauge armonica. In generale, diremo che una metrica è armonica se:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} g^{\nu\rho} = 0 \tag{2.32}$$

Alternativamente, la stessa condizione può essere espressa come segue:

$$\frac{\partial \left(\sqrt{-g} g_{\alpha\beta}\right)}{\partial x^{\beta}} = 0 \tag{2.33}$$

dove g è il determinante associato alla metrica.
Procederemo ora a mostrare la forma della metrica di Schwarzschild in questa gauge. Per uniformarci alla scelta dell'autore, utilizzeremo le coordinate cartesiane $x^i = (x, y, z)$ e indicheremo con r il il modulo del vettore corrispondente.

$$ds^2 = -\frac{1-a}{1+a} c^2 dt^2 + \left[(1+a)^2 \, \delta_{ij} \, + \, \frac{a^2}{r^2} \frac{1+a}{1-a} \, x_i \, x_j \right] dx^i dx^j \tag{2.34}$$

dove abbiamo introdotto per comodità il parametro a:

$$a = \frac{GM}{rc^2} \tag{2.35}$$

A questo punto, andare a definire l'equazione delle geodetiche non è complesso, ma la procedura è piuttosto lingua. Utilizzando la notazione vettoriale, riportiamo il risultato finale che si ottiene andando a calcolare prima i coefficienti di Christoffel, poi utilizzando la (1.6):

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{a}{x^2} \left[-c^2 \frac{1-a}{(1+a)^3} - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + a \frac{2-a}{1-a^2} \left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}}{x} \right)^2 \right] \boldsymbol{x} + \frac{2a}{x^2} \, \frac{2-a}{1-a^2} (\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) \, \dot{\boldsymbol{x}} \, . \tag{2.36}$$

Come già anticipato, la soluzione di questa equazione differenziale non è esprimibile in termini di funzioni elementari. Il problema non può allora essere risolto senza passare pero uno schema di approssimazione: ricaviamo

allora innanzitutto le entrate della metrica al secondo ordine in m/r:

$$g_{00} = -\left(1 - 2a + 2a^2\right) \tag{2.37}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2a\delta_{ij} + \left(\delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{x^2}\right) a^2 \tag{2.38}$$

Ripetendo la procedura precedentemente descritta, è possibile ottenere sia le equazioni del moto nell'approssimazione 1PN, sia quelle all'ordine 2PN: naturalmente nella prima delle due non sarà necessario utilizzare tutti i termini delle (2.37),(2.38): sarà invece sufficiente impiegare i soli termini che siano lineari nel parametro a. Di seguito riportiamo solamente l'equazione al secondo ordine post-Newtoniano:

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{x}} = &-\left(c^2 + \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}\right)\frac{a\,\boldsymbol{x}}{x^2} + 4\frac{a\,\dot{\boldsymbol{x}}\,(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x})}{x^2} \\ &+4c^2\frac{a^2\,\boldsymbol{x}}{x^2} + 2\frac{a^2\,\boldsymbol{x}\,(\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x})^2}{x^4}\end{aligned} \tag{2.39}$$

Nonostante la semplificazione non appaia come molto efficace, la risoluzione dell'equazione è possibile con un approccio perturbativo: con questo, intendiamo che è possibile ottenere le soluzioni dell'equazione a ordine n se è nota quella ad ordine $n-1$. Ci preoccupiamo dunque di risolvere prima di tutto il problema ad ordine 0 che, naturalmente, è quello che si avrebbe in uno spazio perfettamente piatto:

$$\ddot{\boldsymbol{x}_N} = 0 \tag{2.40}$$

la cui soluzione è ovviamente data da:

$$\boldsymbol{x}_N(t) = \boldsymbol{x}_0 + c(t - t_0)\boldsymbol{\sigma} \tag{2.41}$$

dove abbiamo definito $\boldsymbol{\sigma}$ come quel versore che indica la direzione di propagazione (invariata nel tempo a quest'ordine).
Il passo successivo consiste nel considerare l'equazione del moto ad ordine 1PN: poiché questa dovrebbe differire dalla precedente per la sola presenza di termini proporzionali a m/r (il cui contributo è $\ll 1$) ci aspettiamo che anche le soluzioni godano di una proprietà simile; supponiamo dunque che queste abbiano una forma del tipo

$$\boldsymbol{x}_{1PN}(t) = \boldsymbol{x}_0 + c(t - t_0)\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{x}(t) \tag{2.42}$$

A questo punto sarà sufficiente sostituire questa funzione di prova all'interno dell'equazione ad ordine 1PN per scoprire quale è il valore di $\Delta\boldsymbol{x}(t)$; iterando la procedura si potranno ottenere anche le soluzioni valide per gli ordini successivi.
L'espressione per il tempo di volo di un fotone tra due punti $\boldsymbol{x_0}$ e $\boldsymbol{x}$ ottenuta con questa procedura è data da:

$$
\begin{aligned}
N \Big| \quad & c\,\Delta t = R \\
pN \Big| \quad & +2\,m\,\ln\frac{x+x_0+R}{x+x_0-R} \\
\Delta pN \Big| \quad & +2\,m^2\,\frac{R}{|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}_0|^2}\left((x-x_0)^2-R^2\right) \\
ppN \Big| \quad & +\frac{1}{8}\frac{m^2}{R}\left(\frac{x_0^2-x^2-R^2}{x^2}+\frac{x^2-x_0^2-R^2}{x_0^2}\right) \\
ppN \Big| \quad & +\frac{15}{4}\,m^2\,\frac{R}{|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}_0|}\,\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) \\
& +\mathcal{O}(c^{-6})\,.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

Nell'espressione precedente, citando [16] abbiamo riportato il grado di approssimazione di ognuno dei termini. Si noti come il termine che abbiamo indicato con ΔPN formalmente emerge solamente dalla trattazione 2PN ma, se calcolato numericamente, si scopre avere un ordine di grandezza paragonabile ai contributi 1PN.
Il termine 1PN coincide con quanto ottenuto nel precedente paragrafo con una procedura decisamente più rapida: vale la pena allora chiedersi perché non si sia potuto procedere allo stesso modo: ci saremmo cioè potuti limitare allo sviluppo della metrica di Schwarzschild al secondo ordine post-newtoniano, salvo poi integrare direttamente come visto in precedenza. La risposta risiede nel fatto che la risoluzione dell'integrale passa per l'espressione parametrica della curva percorsa dal fotone e, se nel caso 1PN ci si può limitare a considerare una retta, la stessa approssimazione non vale nel caso 2PN. In generale invece, come suggerisce la procedura iterativa proposta da Brumberg, è necessario rifarsi alla curva relativa all'ordine precedente di approssimazione.
Per completezza riscriviamo la precedente espressione del tempo di volo in

funzione di r_A (posizione della pulsar al momento dell'emissione rispetto alla stella compagna), r_B (posizione della Terra), R_{AB} (distanza pulsar-Terra) e φ_e (angolo tra la direzione della pulsar e quella della Terra):

$$c\Delta t = R_{AB} + 2m \ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right) - 4m^2 \frac{R_{AB}}{r_A r_B (1 + \cos\varphi_e)} + \frac{1}{4}\frac{m^2 R_{AB}}{r_A r_B}\cos\varphi_e - \frac{1}{2}\frac{m^2}{R_{AB}}\sin^2\varphi_e + \frac{15}{4}\frac{m^2 R_{AB}\varphi_e}{r_A r_B \sin\varphi_e} \tag{2.44}$$

E' evidente che tale procedura sia particolarmente laboriosa: il dover passare ogni volta per delle equazioni differenziali (la cui complessità aumenta di iterazione in iterazione) è sicuramente un punto a sfavore di questa tecnica. Segnaliamo allora un procedimento ideato da P.Teyssandier [14] durante il primo decennio degli anni 2000 per utilizzi nell'ambito dell'astrometria.

2.3.3 Shapiro Delay - 2PN: Teyssandier

Nel corso di questo paragrafo descriveremo brevemente una tecnica alternativa che permette di evitare il passaggio per le complesse equazioni differenziali viste precedentemente. Il metodo che ci proponiamo di presentare ha peraltro il vantaggio di poter essere facilmente generalizzato agli ordini successivi permettendo, nel caso in cui ve ne fosse la necessità, di calcolare con relativa semplicità anche i contributi al 3PN, 4PN e così via. Per uniformarci alla notazione dell'autore, utilizzeremo momentaneamente la metrica con segnatura $(+,-,-,-)$.

La metodologia proposta si fonda sulla definizione di due *transfer functions*, che nel seguito indicheremo con $\mathcal{T}_e$ e con $\mathcal{T}_r$, mediante le quali tenteremo di calcolare il tempo impiegato da un fotone a spostarsi da un punto $\boldsymbol{x_a}$ a un punto $\boldsymbol{x_B}$:

$$t_B - t_A = \mathcal{T}_r(\boldsymbol{x}_A, t_B, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B). \tag{2.45}$$

Si noti come dalla prima delle due (*reception time function*) sia possibile ottenere il tempo di propagazione noto il tempo di arrivo del fotone; nella seconda invece (*emission time function*) è necessario conoscerne invece il

tempo di emissione. In generale queste due funzioni non hanno la stessa forma analitica: saranno invece coincidenti nel caso in cui la metrica sia stazionaria, ovvero sia quando le sue entrate non dipendono esplicitamente dal tempo.
Possiamo allora pensare di semplificare notevolmente la trattazione limitandoci a questa casistica.

L'idea alla base del ragionamento consiste nel limitarci alla considerazione di quei casi in cui è possibile un'espansione della metrica del tipo:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.46}$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore metrico per lo spazio di Minkowski. Ribadiamo ancora una volta che nel corso di questo paragrafo porremo $\eta_{\mu\nu} = diag\,(+1, -1, -1, -1)$.
Si può allora pensare di considerare un'espansione simile anche per la transfer function:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} + \frac{1}{c}\Delta(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \tag{2.47}$$

dove abbiamo definito $R_{AB} \equiv |\boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}_B|$. Si noti come il primo termine è dunque il tempo di propagazione osservato nel caso di uno spazio piatto, mentre il termine $\Delta(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ rappresenta la correzione apportato dai termini $h_{\mu\nu}$.
Un ultima considerazione è d'obbligo in relazione alla perturbazione $h_{\mu\nu}$ della metrica: assumeremo infatti che questa possa essere scritta come uno sviluppo in termini della costante di gravitazione universale G:

$$h_{\mu\nu}(x, G) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n \, g^{(n)}_{\mu\nu}(x). \tag{2.48}$$

Nell'utilizzo della procedura, capiterà più volte di doversi servire delle componenti controvarianti della metrica: occorre allora definire una procedura che ci permetta di ottenere i valori $h^{\mu\nu}$. Questi saranno calcolabili ricorsivamente:

$$g^{\mu\nu}_{(1)} = -\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} g^{(1)}_{\rho\sigma} \tag{2.49}$$

$$g^{\mu\nu}_{(n)} = -\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} g^{(n)}_{\rho\sigma} - \sum_{p=1}^{n-1} \eta^{\mu\rho}\, g^{(p)}_{\rho\sigma}\, g^{\nu\sigma}_{(n-p)} \tag{2.50}$$

Si può assumere dunque una decomposizione simile anche per il termine $\Delta(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$

$$\Delta(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B, G) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Delta^{(n)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B). \tag{2.51}$$

Riportiamo qui di seguito i risultati validi per gli sviluppi al secondo ordine in G, ottenuti in [14]:

$$\Delta^{(1)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{2} R_{AB} \int_0^1 \left[g^{00}_{(1)} - 2N^i_{AB} g^{0i}_{(1)} + N^i_{AB} N^j_{AB} g^{ij}_{(1)} \right]_{\boldsymbol{z}_+(\mu)} d\mu \tag{2.52}$$

$$\Delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{2} R_{AB} \int_0^1 \Bigg\{ \left[g^{00}_{(2)} - 2N^i_{AB} g^{0i}_{(2)} + N^i_{AB} N^j_{AB} g^{ij}_{(2)} \right]_{\boldsymbol{z}_+(\mu)}$$
$$- 2 \left[g^{0i}_{(1)} - N^j_{AB} g^{ij}_{(1)} \right]_{\boldsymbol{z}_+(\mu)} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{z}_+(\mu)) + \eta^{ij} \left[\frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x^i} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x^j} \right]_{(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{z}_+(\mu))} \Bigg\} d\mu, \tag{2.53}$$

Oltre ai termini già introdotti, definiamo il versore N^i, che identifica la retta congiungente $\boldsymbol{x}_A$ e $\boldsymbol{x}_B$ e il vettore $\boldsymbol{z}_+(\mu)$ che, al variare di μ identifica tutti i punti della medesima retta rispetto al compagno della pulsar. R_{AB}, invece, è la distanza tra la pulsar e l'osservatore.

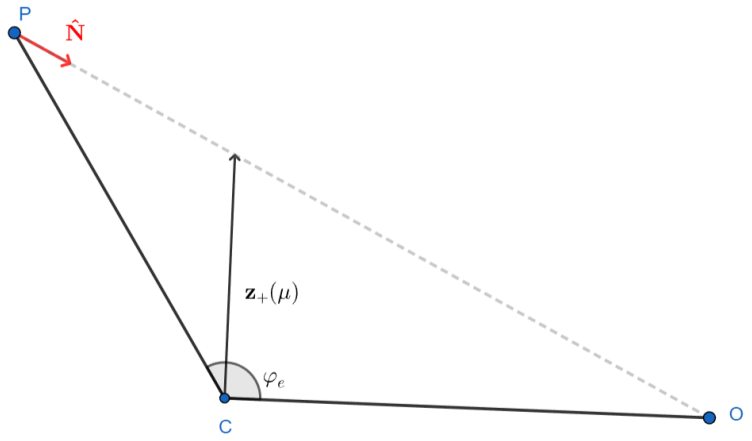


Figura 2.3: Rappresentazione grafica dei termini relativi alle formule (2.52). I punti P,C e O rappresentano rispettivamente le posizioni della pulsar, della sua compagna e dell'osservatore. Il parametro μ varia tra 0 e 1, valori in corrispondenza dei quali descrive la posizione della pulsar e dell'osservatore.

Ci proponiamo ora di mostrare come l'utilizzo di queste formule riconduca ai risultati già ottenuti precedentemente.
Lavoreremo dunque con la metrica di Schwarzschild in coordinate armoniche che, espansa al secondo ordine e con l'utilizzo della segnatura appropriata, risulta essere data da:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{m^2 x^i x^j}{r^4} dx^i dx^j - \delta_{ij} \left(1 + \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{r^2}\right) dx^i dx^j \tag{2.54}$$

Si ricordi che, in questo caso, la distanza r è quelle relativa al compagno della pulsar, mentre m indica la massa di Schwarzschild, ovvero $m = GM/c^2$.

Le componenti della metrica non nulle sono quindi date da:

$$g^{(1)}_{00} = -\frac{2m}{r} \qquad g^{(2)}_{00} = \frac{2m^2}{r^2}$$
$$g^{(1)}_{ij} = -\delta_{ij}\left(\frac{2m}{r}\right) \qquad g^{(2)}_{ij} = -\frac{m^2 x^i x^j}{r^4} - \delta_{ij}\frac{m^2}{r^2}$$

Utilizzando le (2.49) si risale facilmente ai corrispettivi controvarianti:

$$g^{00}_{(1)} = \frac{2m}{r} \qquad g^{00}_{(2)} = \frac{2m^2}{r^2}$$
$$g^{ij}_{(1)} = \delta^{ij}\left(\frac{2m}{r}\right) \qquad g^{ij}_{(2)} = \frac{m^2 x^i x^j}{r^4} - 3\delta^{ij}\frac{m^2}{r^2}$$

Siamo quindi pronti per applicare le (2.52).
Il calcolo di $\Delta^{(1)}$ è piuttosto banale e porta al seguente integrale:

$$\Delta^{(1)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = 2R_{AB} \int_0^1 \frac{m}{|\boldsymbol{z}_+(\boldsymbol{\mu})|} d\mu \tag{2.55}$$

che è lo stesso di fronte al quale ci siamo trovati nella (2.30). Il risultato, quindi, sarà il medesimo:

$$\Delta^{(1)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{2M}{c^2} \ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right), \tag{2.56}$$

Il calcolo del termine $\Delta^{(2)}$ e passa per l'integrale:

$$\Delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{2} R_{AB} \int_0^1 \left[\frac{2m^2}{r^2} + \frac{m^2}{r^2}\left(-3\delta_{ij} + \frac{x^i x^j}{r^2} N^i N^j + \frac{4m}{r}\right) + N^i \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x^i} + \eta^{ij} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x^i} \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x^j}\right]_{\boldsymbol{z}_+(\mu)} d\mu \tag{2.57}$$

Gli ultimi due termini sono dati da:

$$N^i_{AB}\frac{\partial\Delta^{(1)}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{z}_+(\mu)) = 2\frac{M}{c^2|\boldsymbol{z}_+(\mu)|} \tag{2.58}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Delta^{(1)}}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{z}_+(\mu))\right)^2 = 8\frac{M^2}{c^4}\frac{d}{d\mu}\left[\frac{\mu}{r_A|\boldsymbol{z}_+(\mu)|+\mu\boldsymbol{x}_A.(\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{x}_A)+r_A^2}\right]. \tag{2.59}$$

Oltre a queste sarà necessaria un ultima relazione che ci aiuti nel calcolo di quelle porzioni dell'integrale in cui compare r^2 al denominatore:

$$\int_0^1 \frac{d\mu}{|\boldsymbol{z}_+(\mu)|^2} = \frac{\varphi_e}{r_A r_B\sin\varphi_e} \tag{2.60}$$

Siamo finalmente pronti per unire quanto detto finora è trovare il risultato finale per il delay al secondo ordine:

$$\Delta^{(2)}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = \frac{M^2}{c^4}\frac{R_{AB}}{r_A r_B}\left[\frac{15\varphi_e}{4\sin\varphi_e} - \frac{4}{1+\cos\varphi_e} + \frac{\cos\varphi_e}{4} - \frac{1}{2}\frac{r_A r_B\sin^2\varphi_e}{R_{AB}^2}\right],$$

che è esattamente il risultato ottenuto da Brumberg.

Si noti come, ancora una volta, il risultato diverge per $\varphi_e = \pi$: la motivazione risiede nuovamente nel fatto che, quando la pulsar si trova in prossimità della congiunzione inferiore la traiettoria percorsa dal fotone non è più tale da poter garantire la validità delle due tecniche proposte nei paragrafi precedenti; si ha cioè il passaggio attraverso delle regioni dello spazio in cui il campo non è più debole.
Nel prossimo capitolo mostreremo come si possa superare questo problema, integrando numericamente le equazioni.

Capitolo 3

Buchi neri e Pulsar

Il prossimo capitolo sarà interamente dedicato all'analisi del caso specifico in cui il compagno della pulsar sia un buco nero supermassiccio: tale scenario è stato ampiamente studiato da E.Hackmann[9].
L'ipotesi sulla quale l'intera trattazione si baserà sarà proprio l'estrema differenza tra le masse dei due corpi; questa assunzione semplificherà notevolmente la discussione per due motivazioni: in primo luogo, potremo assumere che il centro di massa del sistema si trovi in corrispondenza del buco nero che, dunque, sarà assunto fermo. Inoltre, la sproporzione tra i campi gravitazionali del buco nero e della pulsar ci permetterà di considerare quest'ultima come una "massa di prova" che non influenza la metrica dello spazio circostante: in altre parole, quando considereremo il moto dei raggi luminosi emessi dalla pulsar, considereremo solamente l'influenza del campo di cui il buco nero è sorgente.
A contrapporsi a queste due semplificazioni, vi sarà però una notevole complicazione data dall'impossibilità di introdurre qualsiasi schema di approssimazione: dovremo dunque risolvere le equazioni di Einstein senza poterle espandere intorno al parametro $\epsilon = m/r$, che non risulta più essere trascurabile.
Determineremo allora le equazioni che dovremo risolvere al fine di ottenere il tempo di propagazione per un fotone in moto in un tale spazio-tempo: per semplicità assumeremo circolare l'orbita della pulsar intorno al buco nero e ignoreremo momentaneamente eventuali inclinazioni della stessa rispetto al piano perpendicolare alla linea di vista dell'osservatore; considereremo cioè

il caso in cui la Terra e l'orbita della pulsar fanno parte dello stesso piano geometrico.
Implementando poi una procedura ideata da [7] mostreremo come risolvere numericamente il problema sopra descritto.

In ultima battuta, mostreremo quali cambiamenti si osserverebbero nei tempi di propagazione nel caso in cui il buco nero fosse carico: per scoprirlo studieremo la metrica di Reissner - Nordstrom già menzionata nella (**??**)

3.1 Buchi neri di Schwarzschild

Nel prossimo paragrafo considereremo una pulsar in orbita intorno ad un buco nero di Schwarzschild supermassiccio. Ci proponiamo di ottenere un'espressione che descriva la traiettoria di un fotone che si muove in uno spaziotempo descritto da tale metrica; troveremo inoltre un'espressione per il tempo di propagazione dello stesso.
Ricordiamo brevemente che la metrica di Schwarzschild (in coordinate polari sferiche) ha la forma seguente:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(\sin^2\theta d\theta^2 + d\phi^2\right) \tag{3.1}$$

L'assunzione precedentemente fatta sull'inclinazione dell'orbita ci permette di porre $sin\theta = 1$ e quindi $d\theta = 0$.

Nel ricavare le equazioni del moto possono essere sfruttate le simmetrie di tale metrica: quest'ultima non presenta una dipendenza esplicita né dal tempo t né dalla coordinata angolare φ: questo garantisce la presenza di due costanti del moto che riportiamo di seguito.

$$g_{tt}\dot{x}^0 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{cdt}{d\tau} \equiv -E \tag{3.2}$$

$$g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \equiv L \tag{3.3}$$

Queste, come lasciano presagire i simboli con i quali le abbiamo indicate, sono interpretate come l'energia e il momento angolare del fotone.

Una terza costante del moto può essere ottenuta se si ricorda che deve essere verificata la condizione per le geodetiche nulle:

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0 \tag{3.4}$$

Il punto di partenza della nostra trattazione è rappresentato proprio da quest'ultima equazione che, se sviluppata, porta a:

$$\begin{aligned} -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0 \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{L^2}{r^2} \\ = \frac{L^2}{r^4}\left(\frac{r^4}{b^2} - r^2 + 2mr\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo fatto uso delle costanti precedentemente definite.

E' inoltre risultata comoda l'introduzione del parametro $b = L/E$, al quale ci riferiremo d'ora in avanti come *parametro di impatto* (si veda la Figura (3.1)): b rappresenta cioè la minima distanza dal buco nero alla quale il fotone transiterebbe se lo spazio fosse piatto. Nell'ambito della relatività generale, ci aspettiamo che la minima distanza alla quale il fotone transiterà dal buco nero sia inferiore rispetto al parametro di impatto per effetto della curvatura della traiettoria: tale discrepanza sarà, in percentuale, tanto più evidente quanto maggiore è la curvatura dello spazio-tempo considerato.

Particolare importanza riveste inoltre il polinomio tra parentesi:

$$R(r) \equiv \frac{r^4}{b^2} - r^2 + 2mr \tag{3.6}$$

Visto che il primo membro della (3.1) è necessariamente positivo, il moto del fotone sarà possibile solamente nelle regioni dello spazio in cui $R(r) > 0$; fattorizzare $R(r)$ è in tal senso particolarmente utile:

$$R(r) = \frac{1}{b^2}(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4) \tag{3.7}$$

con $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ e $r_2 = 0$.

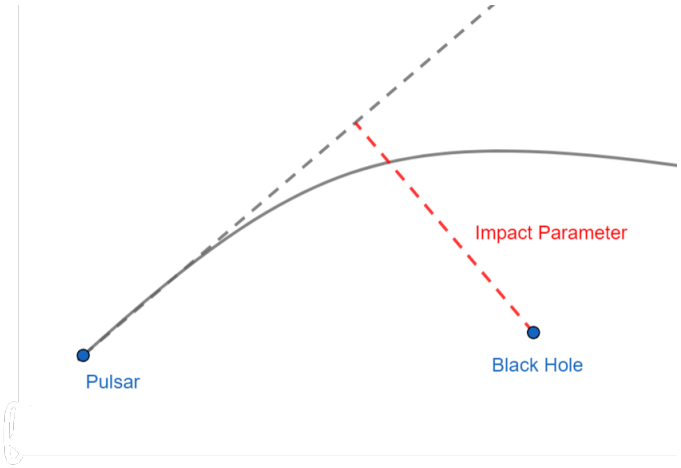


Figura 3.1: Rappresentazione del parametro di impatto: la linea tratteggiata (nera) è la traiettoria che il fotone percorrerebbe su uno spazio piatto; la linea continua delinea invece il percorso di un fotone curvato dalla presenza del buco nero. In rosso è evidenziato il parametro di impatto

Ne consegue che, lo studio di $R(r)$ si possa ricondurre a quello di un polinomio di quarto grado: avremo necessariamente almeno una radice negativa (r_1); al variare di b, inoltre, le altre due radici non nulle, ovverosia r_3 e r_4, potranno essere reali o complesse. Da un banale studio della funzione è possibile mostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici siano reali è che $b > \sqrt{27}m$. D'ora in poi ci riferiremo a questo valore come *parametro di impatto critico* b_{crit}.

Ricordando che il polinomio deve essere positivo affinché il moto sia possibile, abbiamo bisogno di determinare per quali valori di b questa condizione non venga violata. Partiamo dal caso in cui un fotone si muove verso il buco nero: questo implica che la coordinata radiale r stia decrescendo. Notiamo subito che, se il polinomio $R(r)$ non avesse radici reali al di fuori di r_1 e r_2, il moto del fotone proseguirebbe senza arrestarsi fino al raggiungimento della singolarità in $r = 0$; ne consegue che, affinché il raggio luminoso possa giungere fino ad un osservatore esterno, il parametro di impatto b debba essere tale per cui $R(r)$ abbia almeno una radice positiva: questo è possibile se $b > b_{crit}$. In questo modo il fotone giungerà fino al punto di coordinata $r = r_4$ in corrispondenza del quale inizierà nuovamente ad allontanarsi dal buco ne-

ro. Facciamo dunque notare che ogni qualvolta il fotone venga emesso dalla pulsar in modo tale che la sua traiettoria preveda un iniziale avvicinamento al buco nero, vi è la certezza che questo non venga assorbito dalla singolarità solo nei casi in cui $b > b_{crit}$.
Esiste in realtà un'altra casistica da esaminare, che nel seguito denomineremo *propagazione diretta*: potrebbe infatti accadere che la pulsar si trovi in quella regione di spazio compresa tra il buco nero e la Terra e emetta un fotone verso il pianeta: in questo scenario, non è importante quale sia il valore del parametro di impatto, poiché il raggio luminoso riuscirà in ogni caso ad allontanarsi indefinitamente dalla singolarità. Si faccia riferimento a tal proposito all'immagine sottostante:

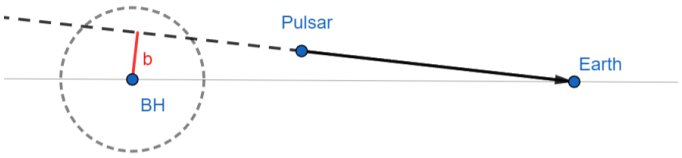


Figura 3.2: Propagazione diretta: il moto è possibile anche se il parametro di impatto (in rosso) è minore del valore critico (tratteggiato, in grigio).

Concentriamoci ora sulla determinazione della forma della traiettoria descritta dal fotone: nel farlo, è sufficiente riferirsi alle equazioni (3.2) e (3.1), dalle quali si ottiene immediatamente

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = R\left(r\right) \quad \rightarrow \quad \Delta\varphi = \pm \int_\gamma \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} \tag{3.8}$$

dove γ è la curva descritta dal fotone. La scelta del segno che precede l'integrale è da effettuarsi in base al tipo di moto al quale il fotone è soggetto: supposta una rotazione antioraria dello stesso (che si traduce in un $d\varphi > 0$), sceglieremo il segno - nel caso in cui il fotone si stia avvicinando al buco nero, mentre la scelta del segno + sarà riservata alla casistica opposta. Si

noti inoltre che la variazione della coordinata angolare del fotone dipende da $R(r)$ il quale a sua volta nasconde una dipendenza da b: in altre parole, come era lecito aspettarsi, $\Delta\varphi$ dipenderà dalla direzione nella quale il fotone è stato emesso inizialmente: nello specifico, l'entità del parametro di impatto sarà inversamente proporzionale all'entità della curvatura della traiettoria.

Con una procedura analoga è possibile risalire anche al tempo totale di volo:

$$\left(\frac{dr}{cdr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{b^2}{r^4}R\left(r\right) \quad \rightarrow \quad \Delta t = \pm\frac{1}{c}\int_\gamma \frac{r^2 dr}{b\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{R\left(r\right)}} \tag{3.9}$$

Si noti come entrambi gli integrali (3.8) e (3.9) non abbiano alcuna soluzione in termini di funzioni elementari: è possibile invece riscriverli come combinazione lineare dei tre integrali di Legendre (incompleti) del primo, secondo e terzo tipo.

Poiché il nostro obiettivo è quello di scoprire qual è il tempo impiegato da un fotone per raggiungere la Terra al variare della posizione della pulsar, il problema non ha soluzione se non numerica: non è cioè possibile invertire la (3.8) per ricavare b. Per questo motivo, sulla base delle idee proposte nell'articolo [7], abbiamo definito un algoritmo ideato sulla base dei seguenti princìpi:

- Si suppone che, per semplicità, l'osservatore si trovi in $\varphi = 0$. Chiameremo inoltre r_e e r_{obs} le distanza della pulsar e della Terra dal buco nero, mentre r_{min} sarà la distanza minima alla quale il fotone transiterà dalla singolarità e coincide con la radice maggiore (r_4) di $R(r)$.

- Se la pulsar, al momento dell'emissione, si trova nella posizione (r_e, φ_e), questo implica che il fotone, nel giungere fino all'osservatore, sia stato interessato da una variazione della coordinata φ pari a $-\varphi_e$ (ammesso che la rotazione sia avvenuta in senso antiorario);

- Ci poniamo l'obiettivo di trovare il valore di b che, posto nella (3.8) restituisca l'angolo ricercato. Lo stesso parametro b verrà poi impiegato

per il calcolo del tempo di propagazione corrispondente a mezzo della (3.9)

In questo modo, qualsiasi sia la posizione iniziale della pulsar, ammesso che si riescano a implementare correttamente tutti i passaggi sopra descritti, si riuscirebbe a risalire al parametro di impatto con il quale il fotone è stato emesso[1], per poi utilizzare tale risultato nel calcolo del tempo di propagazione.

Questo problema è meglio noto come *emitter-observer problem* e consiste nel determinare il parametro di impatto relativo all'emissione del fotone, conoscendone solamente il punto di partenza e quello di arrivo.

Si noti inoltre che una ulteriore difficoltà si presenta nel momento in cui si tenta la risoluzione degli integrali di cui alle (3.8) e (3.9): la ragione risiede nel fatto che, a priori, non si conosce la traiettoria del fotone, ma se ne conoscono solo i suoi estremi. In generale, i percorsi possono essere di due tipologie; la prima possibilità, che risulta essere la più semplice da trattare, è quella che abbiamo già presentato *propagazione diretta*: questa è caratterizzata dal fatto che la coordinata radiale r è monotonicamente crescente; in altre parole, il moto del fotone è tale per cui non si abbia mai un "avvicinamento" al buco nero. In questo caso l'integrale ha la forma:

$$\Delta\varphi_{direct} = \int_{r_e}^{r_{obs}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} \tag{3.10}$$

Il caso di propagazione indiretta, invece, è leggermente più complesso: in una fase iniziale il fotone si avvicinerà al buco nero, salvo poi allontanarsene indefinitamente. In questo caso, allora, la corretta integrazione sarà del tipo:

$$\Delta\varphi_{indirect} = -\int_{r_e}^{r_{min}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} + \int_{r_{min}}^{r_{obs}} \frac{dr}{\sqrt{R(r)}} \tag{3.11}$$

dove r_{min} è la minima distanza dal buco nero alla quale il fotone transiterà; il segno meno è stato inserito sulla base delle precedenti considerazioni.

[1] Il vincolo che stiamo implicitamente inserendo nelle equazioni è legato all'effettiva osservazione del fotone sull'osservatorio terrestre: in altre parole, stiamo ricercando quel parametro di impatto con il quale un fotone dovrebbe essere emesso a partire da una certa posizione, affinché poi questi raggiunga effettivamente la Terra.

Una procedura analoga ci porterà alla risoluzione dell'integrale per il tempo di propagazione che, nel caso diretto sarà dato da:

$$\Delta t_{direct} = \frac{1}{c}\int_{r_e}^{r_{obs}} \frac{r^2 dr}{b\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{R\left(r\right)}} \tag{3.12}$$

e nel caso indiretto da:

$$\Delta t_{indirect} = \frac{1}{c}\left[-\int_{r_e}^{r_{min}} \frac{r^2 dr}{b\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{R\left(r\right)}} + \int_{r_{min}}^{r_{obs}} \frac{r^2 dr}{b\left(1-\frac{2m}{r}\right)\sqrt{R\left(r\right)}}\right] \tag{3.13}$$

Prima di descrivere in maniera dettagliata il funzionamento dell'algoritmo che abbiamo riprodotto, è necessaria un'ultima precisazione: nelle righe precedenti abbiamo omesso il fatto che, a dire il vero, la soluzione per il parametro di impatto, nota la posizione di emissione, non è in realtà unica: la traiettoria potrebbe infatti consistere in un avvicinamento al buco nero, seguito da una serie di rivoluzioni intorno allo stesso, prima che il fotone se ne allontani indefinitamente: per quanto controintuitivo, un tale scenario è consentito dalle equazioni sopra descritte ed è realizzato nel caso di parametri di impatto b che siano molto prossimi al valore critico. In questa sede ci limiteremo a considerare il caso in cui non vi siano rivoluzioni multiple, motivo per il quale i grafici che verranno presentati non supereranno mai il valore $\Delta\varphi = 360°$, che corrisponde ad una rivoluzione completa intorno al buco nero[2]. Un tale risultato è già di per se un'estensione di quanto descritto in [7], articolo nel quale ci si limitava a considerare il range $\Delta\varphi \in [0, 180°]$.

A questo punto possiamo finalmente dare una descrizione del funzionamento dell'algoritmo, che è stato sviluppato nel linguaggio di programmazione *Python*.
Ci siamo proposti di analizzare un intervallo di valori per $\Delta\varphi \in [0, 360]$: rimarchiamo ancora una volta il fatto che il valore scelto per $\Delta\varphi$ **non** è in generale la posizione angolare della pulsar al momento dell'emissione del fotone, bensì la variazione di tale coordinata per il fotone stesso nel percorso che lo porterà fino all'osservatore. Un $\Delta\varphi = 540$, ad esempio, coinciderebbe

[2]In questo scenario il fotone viene emesso dalla pulsar quando questa si trova nella posizione di congiunzione inferiore. Dopo aver compiuto un giro completo intorno al buco nero, se ne allontana indefinitamente nella stessa direzione dalla quale era stato emesso

con il caso in cui il fotone viene emesso nella posizione della congiunzione superiore e, dopo aver compiuto un giro completo intorno al buco nero se ne allontana, raggiungendo l'osservatore. Ci aspettiamo dunque che al crescere di $\Delta\varphi$ il parametro di impatto (e con lui la minima distanza dalla singolarità) decresca, senza mai scendere al di sotto del valore critico poc'anzi determinato.

Scelto allora un valore per $\Delta\varphi$ il nostro obiettivo consiste nel determinare quale valore per il parametro di impatto, se sostituito nella (3.8) restituirebbe l'angolo desiderato: si noti come, a priori, non possiamo sapere se la propagazione sarà diretta o indiretta e, quindi, quale dei due integrali restituisca la risposta corretta.
L'algoritmo pensato consiste nell'applicazione del metodo di bisezione sull'intervallo entro il quale il parametro di impatto può variare, ovvero: $b \in [0, r_e]$, dove r_e è la distanza della pulsar dal buco nero. Si noti come l'estremo inferiore dell'intervallo è stato posto pari a $b = 0$ poiché l'inclusione dei valori di b inferiori a b_{crit} è fortemente necessaria nella regione in cui la propagazione è diretta. Si pensi ad esempio al caso di congiunzione inferiore, o alle posizioni ad essa prossime: il parametro di impatto è in quel caso sicuramente inferiore a b_{crit}. La procedura viene eseguita due volte per ogni valore di $\Delta\varphi$: una supponendo che la propagazione sia diretta, una supponendo che la propagazione indiretta. Tra i due parametri di impatto così ottenuti, naturalmente, verrà scelto quello che ha portato al risultato di $\Delta\varphi$ più prossimo al valore obiettivo.
Per il metodo di bisezione è stata fissata una tolleranza di 10^{-20}: questo significa che l'algoritmo si interrompe non appena trova un parametro di impatto il cui corrispondente valore di $\Delta\varphi$ differisce dal valore obiettivo per una quantità minore della suddetta tolleranza.
Dopodiché il b così ottenuto viene utilizzato per il calcolo del tempo di propagazione. Ripetendo la procedura sull'intero range, si può ottenere un grafico che mostri come varia il tempo t in funzione di $\Delta\varphi$.
La procedura di integrazione numerica è stata eseguita con l'ausilio del pacchetto $QUADPACK$, mentre la ricerca delle radici del polinomio è banale perché è possibile scrivere le soluzioni di un'equazione di quarto grado in

forma chiusa[3].
Si noti che la scelta del metodo con il quale ricercare le radici non è la stessa attuata in [7], nel quale la necessità di costruire un algoritmo che avesse validità generale (non limitata quindi a metriche che siano riconducibili allo studio di polinomi interi, come invece accade nel nostro caso) impediva di applicare il metodo da noi scelto.
In quel caso, peraltro, l'autore dell'articolo menziona l'utilizzo del pacchetto $MINPACK$ per il ritrovamento di tali radici: tale algoritmo richiede all'utilizzatore l'inserimento di un "valore di riferimento" intorno al quale la radice deve essere ricercata; la soluzione trovata in [7] è stata quella di fornire come valore approssimativo quello dato da $r_e \sin\varphi$, che corrisponderebbe alla minima distanza dal buco nero nel caso in cui lo spazio fosse piatto e siano quindi trascurati tutti gli effetti di curvatura.
Tale procedura non è però adatta alla nostra trattazione, poiché una simile approssimazione non è più valida nel regime di grandi curvature, che si ottengono proprio per i valori $\Delta\varphi > 180°$, sui quali il suddetto autore non ha eseguito alcuno studio.

Nelle prossime righe mostreremo i risultati ottenuti in relazione ad un buco nero che ha delle caratteristiche (massa e distanza dall'osservatore) che richiamano quelle di SGR A*, il buco nero al centro della Via Lattea[4].

L'immagine (3.5) mostra quale sia la correlazione tra il parametro di impatto b e la variazione angolare $\Delta\varphi$: si noti come $b = 0$ nel caso di congiunzione inferiore e come si abbia una progressiva crescita dello stesso fino a $\Delta\varphi = 90$. La porzione più interessante del grafico è quella relativa alla propagazione indiretta: come ci aspetta, infatti, una curvatura maggiore della traiettoria è possibile solo per parametri di impatto che sono via via più prossimi a quello critico. A tal proposito, riportiamo sulla destra un grafico che rappresenta tale sottointervallo.

[3]La determinazione delle radici del polinomio è necessaria perché il valore r_{min} che compare all'estremo di integrazione delle (3.11) e (3.13) è proprio la maggiore tra le radici di $R(r)$

[4]La distanza dall'osservatore è stata scelta essere pari a 2.55×10^{20}, mentre la massa $M = 8.54 \times 10^{36}$

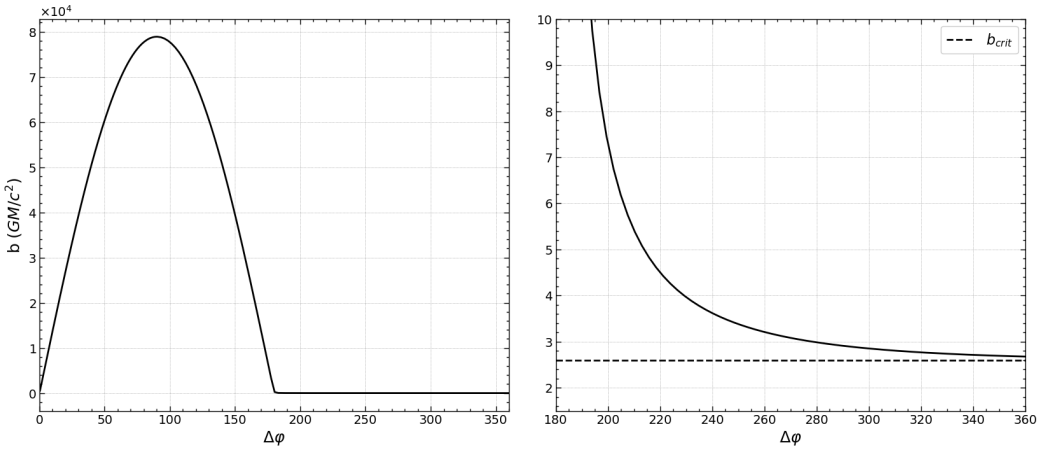


Figura 3.3: Parametro di impatto in funzione dell'angolo $\Delta\varphi$: l'immagine di destra rappresenta uno zoom sulla seconda parte del grafico. Si noti come il valore di b (nella propagazione indiretta) non scende mai al di sotto del valore critico, che è indicato con la linea tratteggiata.

Si noti come il valore del parametro di impatto si avvicini indefinitamente al valore critico, che risulta quindi un asintoto per la curva.

L'immagine (3.4), invece, mostra quale sia l'andamento del tempo totale di volo del fotone in funzione di $\Delta\varphi$: riportiamo ancora una volta uno zoom sulla seconda parte del grafico. Il fatto che tale funzione sembri stabilizzarsi che $\Delta\varphi$ ha superato i 180 è giustificato dal fatto che tutte le traiettorie tali per cui $180 < \Delta\varphi < 360$ hanno pressocchè la stessa lunghezza: ciò che le differenzia è solamente la progressiva diminuzione della distanza di minimo approccio, che contribuirà all'amplificazione dell'effetto di dilatazione temporale e, dunque, all'aumentare del tempo totale di propagazione.

3.2 Buchi neri di Reissner-Nordstrom

Proveremo ora ad applicare ai buchi neri di Reissner-Nordstrom quanto visto sulla metrica di Schwarzschild. Ricordiamo che in questo caso la forma

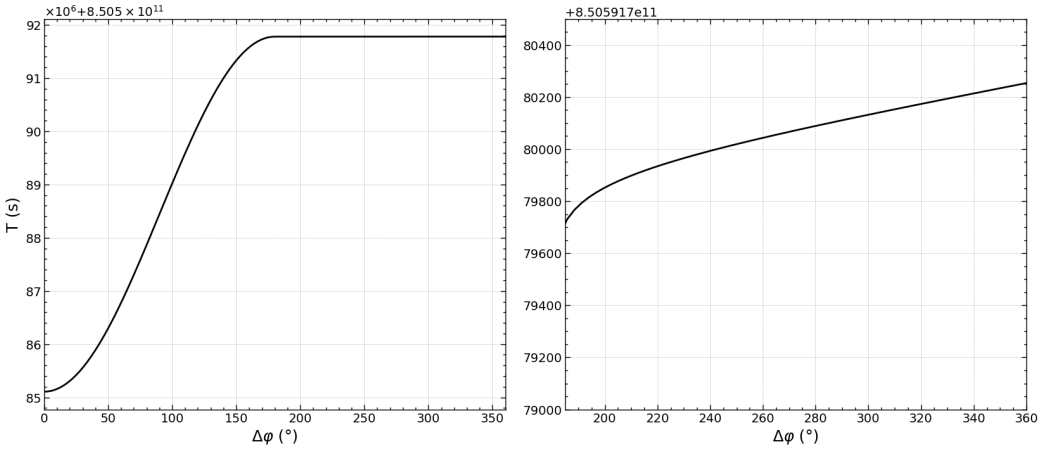


Figura 3.4: Tempo di propagazione per un fotone in funzione del corrispondente angolo $\Delta\varphi$. La porzione destra del grafico evidenzia come, sebbene il tempo di propagazione sembri costante per angoli superiori ai 180°, in realtà il suo andamento sia monotonicamente crescente.

della metrica è data da:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM+}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.14}$$

Nel seguito, per comodità, andremo a definire $m = GM/c^2$ e $r_q^2 = GQ^2/4\pi\epsilon_0 c^4$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.15}$$

Anche in questo caso avremo a nostra disposizione tre costanti nell'analisi del moto dei fotoni:

$$g_{tt}\dot{x}^0 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\frac{cdt}{d\tau} \equiv -E \tag{3.16}$$

$$g_{\phi\phi}\dot{\phi} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \equiv L \tag{3.17}$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \tag{3.18}$$

Ricordando che siamo interessati alle equazioni per φ e r, questa volta otteniamo:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{r^4}{b^2} - r^2 + 2mr - r_Q^2} \equiv \sqrt{Q\,(r)} \tag{3.19}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{b\sqrt{Q\,(r)}}{r^2} \tag{3.20}$$

Anche in questo caso siamo interessati al definire un valore di soglia per il parametro di impatto, tale cioè per cui ogni fotone con $b < b_{crit}^{RN}$ venga catturato dal buco nero.
Il ragionamento sarà il medesimo adottato per i buchi neri di Schwarzschild è implicherà dunque il passaggio per l'analisi del polinomio $Q(r)$: la difficoltà aggiuntiva è data in questo caso dal fatto che $Q(r)$ sia di quarto grado e presenti un termine noto, il quale complica la trattazione. Seguendo [5] mostriamo un metodo alternativo che ci permetta di determinare il parametro di impatto critico.
Partendo dalla (3.20), definiamo una variabile ausiliaria $u = 1/r$; possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \left(\frac{du}{dr}\right)^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{r^4}{b^2} - r^2 + 2mr - r_Q^2\right) \\ &= \left(-r_Q^2u^4 + 2mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}\right) \equiv f(u)\end{aligned} \tag{3.21}$$

Per scoprire quale sia la condizione per la quale si abbiano due radici coincidenti (che quindi ci aiuterà a discernere tra i casi in cui le radici sono complesse e quelli in cui sono reali) è necessario studiare la derivata di tale funzione, che avrà la forma

$$f'(u) = -2u(1 - 3mu + 2r_Q^2u^2) \tag{3.22}$$

e che ammette, al più due soluzioni. La minore delle due è data da:

$$u_{crit} = \frac{3m}{4r_Q^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{8r_Q^2}{9m^2}}\right] \tag{3.23}$$

alla quale corrisponde

$$r_{crit} = 1.5m\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8r_Q^2}{9m^2}}\right) \tag{3.24}$$

Questo risulta essere il raggio della più piccola traiettoria chiusa percorribile da un fotone (o da qualunque altra particella non massiva): il valore del parametro di impatto per il quale $Q(r)$ avrebbe due radici coincidenti di valore pari a r_{crit} è proprio il b_{crit} ricercato. Un altro valore r'_{crit} sarebbe stato ottenuto scegliendo l'altra radice per $f'(u)$: trascureremo tuttavia

questa opzione perché il suo valore è tale per cui la superficie critica si trovi all'interno dell'orizzonte degli eventi.

$$b_{crit} = \frac{r_{crit}^2}{\sqrt{mr_{crit} - r_Q^2}} \tag{3.25}$$

Si noti che nel limite in cui $Q \to 0$ anche $r_Q \to 0$: ne consegue che $r_{crit} \to 1.5m$, che è proprio il valore della raggio minimo consentito per l'orbita di una particella massless intorno ad un buco nero di Schwarzschild. Si riotterrebbe inoltre $b_{crit} = 3\sqrt{3}m$, che è proprio parametro di impatto critico ottenuto nella sezione precedente.
A questo punto è possibile replicare la trattazione svolta per il caso di Schwarzschild: in questa sede eviteremo di presentare i grafici relativi ai parametri di impatto e ai tempi di propagazione in una metrica di RN, poichè questi risulterebbero indistuinguibili da quelli mostrati nel caso di Schwarzschild. Mostreremo invece un grafico che rappresenti la differenza tra i tempi di propagazione nelle due metriche, al variare della carica del buco nero: ci limiteremo a considerare i casi in cui il valore di $r_Q = \{0.2m, 0.5m, 0.8m\}$

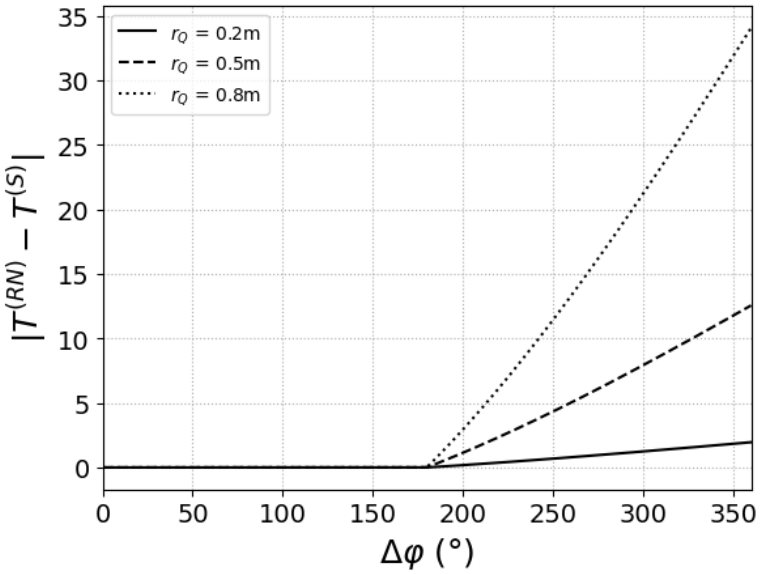


Figura 3.5: Differenze nei tempi di propagazione sulla metrica di Schwarzschild e su diverse configurazioni della metrica di Reissner - Nordstrom

Come era facilmente pronosticabile, le due metriche risultano da questi grafici pressochè indistinguibili fintantoché il $\Delta\varphi$ considerato rimanga al di

sotto dei 180°; superata tale soglia, invece, i tempi di propagazione dei fotoni differiscono per una quantità che arriva a raggiungere diverse decine di secondi.
Si noti come non abbiamo volutamente considerato il caso in cui risultasse $r_Q > m$: in quello scenario, infatti, avremmo avuto a che fare con un buco nero privo di alcun orizzonte degli eventi, con la conseguente presenza di una singolarità nuda.

3.3 Possibili miglioramenti e idee future

Concludiamo la trattazione presentando alcune delle idee che si potrebbe pensare di sviluppare in un futuro prossimo.
Sebbene nel corso di questo lavoro di tesi ci sia sempre e solo serviti di un'integrazione numerica delle equazioni, va tenuto presente che, nel caso della metrica di Schwarzschild, gli integrali relativi all'angolo di deflessione e al tempo di propagazione sono in realtà degli imtegrali ellittici; ricordiamo brevemente che un integrale ellittico ha la forma data da[3]:

$$I = \int R\left(t, \sqrt{P(t)}\right) dt \tag{3.26}$$

dove $P(t)$ è un qualsiasi polinomio di grado non superiore al quarto e R è una qualsiasi funzione razionale dipendente da t e da $\sqrt{P(t)}$. La stupefacente proprietà di questi integrali è che possono sempre essere riscritti in termini di tre funzioni note come *Integrali di Legendre*, i cui valori sono noti con precisione estrema.
Poiché gli integrali relativi al buco nero di Schwazrschild sono di questa tipologia, una decomposizione simile è possibile: si veda, ad esempio, il lavoro di E.Hackmann [9], che ha fortemente ispirato questo lavoro di tesi. Considerazioni simili sono state poi estese anche ai buchi neri di Kerr, che rappresentano la soluzione alle equazioni di Einstein che descrive lo spazio-tempo esterno ad una massa M che può ruotare intorno ad un asse fisso.
Per queste motivazioni siamo convinti che sarebbe altrettando utile estendere tale trattazione ai buchi neri di RN che, per quanto ci risulta, non sono stati ancora risolti in termini di integrali di Legendre sebbene un rapido esame

della metrica ci garantisca che tale operazione sarebbe sicuramente possibile.

Capitolo 4

Conclusioni

Nel concludere questo lavoro di tesi, riepiloghiamo brevemente quanto visto.

Nel *Capitolo 1* abbiamo introdotto brevemente la teoria della relatività generale, definendo i concetti di *varietà differenziabile* e *geodetica* che stanno alla base della stessa. Dopodichè abbiamo riportato le equazioni di Einstein abbiamo focalizzato la nostra attenzione sulle soluzioni di Schwarzschild e Reissner-Nordstrom. Per concludere, abbiamo visto brevemente quali sono alcuni schemi di approssimazione che vengono frequentemente utilizzati nell'ambito della GR.

Nel *Capitolo 2*, invece, riprendendo i concetti legati ai vari schemi di approssimazione precedentemente introdotti, abbiamo mostrato un possibile approccio al problema due corpi al primo ordine post-Newtoniano, evidenziando differenze e similarità con la teoria Kepleriana.
Nel tentativo di quantificare lo Shapiro Delay nel caso di pulsar in sistemi binari, abbiamo poi mostrato quale espressione questo assuma ad ordine 1PN; generalizzando poi all'ordine successivo, abbiamo mostrato due possibili procedure che conducono ovviamente allo stesso risultato, ma che approcciano il problema in maniera diametralmente opposta: abbiamo visto da un lato l'approccio di Brumberg, ripreso poi da Zschoke e Klioner, che implica la risoluzione di una serie di equazioni differenziali; l'approccio di Teyssandier, invece, ha il vantaggio di passare per la sola risoluzione di una serie di inte-

grali.

Nel *Capitolo 3*, infine, abbiamo considerato il moto di una pulsar intorno ad un buco nero supermassiccio di Schwarzschild: abbiamo quindi mostrato come il problema dovrebbe essere affrontato senza l'ausilio di alcun tipo di approssimazione, concludendo che una soluzione analitica non può essere ottenuta; dopo aver presentato un algoritmo il cui scopo fosse oltrepassare questo problema, abbiamo presentato dei grafici che mostrassero quale fosse la dipendenza del tempo di propagazione degli impulsi luminosi in funzione della posizione di emissione degli stessi. Ripetendo la procedura per la metrica di Reissner-Nordstrom, abbiamo poi comparato i due risultati ottenuti.

Bibliografia

[1] D. C. Backer e R. W. Hellings. "Pulsar timing and general relativity." In: 24 (gen. 1986), pp. 537–575. DOI: 10.1146/annurev.aa.24.090186.002541.

[2] V.A. Brumberg. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. CRC Press LLC, 2017. ISBN: 9780203756591. URL: https://books.google.it/books?id=NIeatQEACAAJ.

[3] P.F. Byrd e M.D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN: 9783642651380. URL: https://books.google.it/books?id=Cr_3CAAAQBAJ.

[4] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003. ISBN: 0805387323. URL: http://www.amazon.com/Spacetime-Geometry-Introduction-General-Relativity/dp/0805387323.

[5] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1998. ISBN: 9780198503705. URL: https://books.google.it/books?id=LBOVcrzFfhsC.

[6] T. Damour e N. Deruelle. "General relativistic celestial mechanics of binary systems. I. The post-Newtonian motion." In: *Annales de L'Institut Henri Poincare Section (A) Physique Theorique* 43.1 (gen. 1985), pp. 107–132.

[7] Riccardo Della Monica, Ivan De Martino e Mariafelicia De Laurentis. "Testing space–time geometries and theories of gravity at the Galactic centre with pulsar's time delay". In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 524.3 (lug. 2023), pp. 3782–3796. ISSN: 1365-2966.

DOI: 10.1093/mnras/stad2125. URL: http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stad2125.

[8] A. Einstein. "The Foundation of the General Theory of Relativity". In: (1916).

[9] Eva Hackmann e Arnab Dhani. "The propagation delay in the timing of a pulsar orbiting a supermassive black hole". In: *General Relativity and Gravitation* 51.3 (mar. 2019). ISSN: 1572-9532. DOI: 10.1007/s10714-019-2517-2. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10714-019-2517-2.

[10] Sergei A. Klioner e Sven Zschocke. *Parametrized post-post-Newtonian analytical solution for light propagation*. 2009. arXiv: 0902.4206 [astro-ph.IM]. URL: https://arxiv.org/abs/0902.4206.

[11] D. Lorimer e M. Kramer. "Handbook of Pulsar Astronomy". In: *Handbook of pulsar astronomy, by D.R. Lorimer and M. Kramer. Cambridge observing handbooks for research astronomers, Vol. 4. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004* -1 (nov. 2004).

[12] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2007. ISBN: 978-0-19-171766-6, 978-0-19-852074-0. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001.

[13] Karl Schwarzschild. "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". In: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (gen. 1916), pp. 189–196.

[14] Pierre Teyssandier e Christophe Le Poncin-Lafitte. "General post-Minkowskian expansion of time transfer functions". In: *Classical and Quantum Gravity* 25.14 (giu. 2008), p. 145020. ISSN: 1361-6382. DOI: 10.1088/0264-9381/25/14/145020. URL: http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/25/14/145020.

[15] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984. ISBN: 9780226870328. URL: https://books.google.it/books?id=ibSdQgAACAAJ.

[16] Sven Zschocke e Sergei A. Klioner. *Analytical solution for light propagation in Schwarzschild field having an accuracy of 1 micro-arcsecond.* 2009. arXiv: 0904.3704 [astro-ph.IM]. URL: https://arxiv.org/abs/0904.3704.