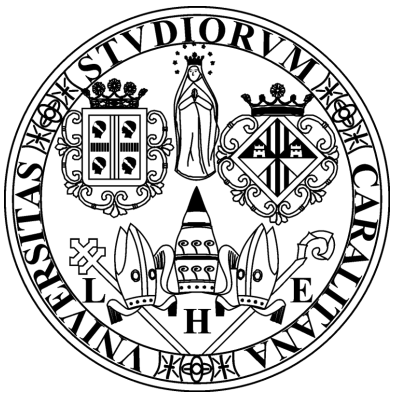


Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Rilevazione di un fondo stocastico di onde gravitazionali tramite PTA – scenari di gravità modificata

Relatori:
Prof.ssa Delphine Perrodin

Candidato:
Carla Bertacche
matr. 60/60/66010

Anno Accademico 2024/2025
Cagliari - 25/09/25

Indice

Introduzione 1

1 Teoria delle onde gravitazionali 2

1.1 La teoria linearizzata della gravità 2

1.2 Propagazione di GW[1]monocromatiche . . . . . .

1.3 GW in uno background curvo 3

1.4 Generazione di GW nella teoria linearizzata 4

2 Pulsar Timing Arrays 7

2.1 Pulsar 7

2.2 Pulsar al millisecondo 7

2.3 Pulsar timing 8

2.3.1 Determinazione del modello di timing: residui temporali 8

2.3.2 Correzioni di orologio e frequenza 9

2.3.3 Correzioni baricentriche 9

2.3.4 Timing noise 10

2.4 Testare la gravità con le GW 11

3 Fondo stocastico di GW 13

3.1 Sorgenti astrofisiche di GW 13

3.2 Sorgenti di un GWB[2] . . . . . .

3.2.1 Fondi astrofisici 14

3.2.2 Fondi cosmologici 14

3.3 Effetto delle GW sul timing di una singola pulsar 15

3.4 Risposta a un fondo stocastico di GW 17

3.5 GWB di sorgenti astrofisiche 18

3.6 GWB proveniente da SMBHB[3] . . . . . .

[1]**GW**: Gravitational Waves

[2]**GWB**: Gravitational Wave Background

[3]**SMBHB**: Supermassive Black Hole Binaries

4 Analisi dati delle GW 21

4.1 Estrazione del segnale GW dal rumore . . . 21

4.2 Inferenza Bayesiana . . . 21

4.2.1 Parameter estimation . . . 22

4.2.2 Model selection . . . 22

4.2.3 Tecniche bayesiane numeriche . . . 23

4.3 PTA[4]Likelihood . . .

4.3.1 Effemeridi temporali . . . 23

4.3.2 Processi acromatici a bassa frequenza . . . 24

4.3.3 White noise . . . 25

4.3.4 La likelihood marginale . . . 26

5 15yr Data Set di NANOGrav 29

5.1 Parameter estimation . . . 29

5.1.1 Parametri acromatici a bassa frequenza . . . 29

5.1.2 Parametri di white noise . . . 30

5.1.3 Modello di timing . . . 30

5.1.4 Creazione del modello completo . . . 31

5.1.5 Distribuzione a posteriori . . . 31

5.1.6 Analisi con spettro libero . . . 33

5.2 Adattamento ORF[5]a spline . . .

5.3 Model Selection . . . 35

5.3.1 Modelli di correlazione alternativi . . . 36

5.3.2 Polarizzazioni alternative . . . 38

6 Conclusioni 39

7 Bibliografia 41

[4]**PTA**: Pulsar Timing Arrays

[5]**ORF**: Overlap Reduction Function

Introduzione

Le onde gravitazionali (*Gravitazional Waves*, GW) sono increspature dello spazio-tempo che si propagano alla velocità della luce. Predette dalla teoria della Relatività Generale (*General Relativity*, GR) di Albert Einstein nel 1916, la loro esistenza trovò una prima conferma indiretta nel 1974, grazie all'osservazione della pulsar binaria di Hulse e Taylor. Da allora, l'interesse della comunità scientifica per questa nuova frontiera della fisica è cresciuto in maniera considerevole, stimolando lo sviluppo di tecniche sempre più raffinate per rivelare questi segnali estremamente deboli, spesso mascherati dal rumore intrinseco degli strumenti di misura.

In questo contesto si inseriscono i *Pulsar Timing Arrays* (PTA), che sfruttano la straordinaria stabilità dei periodi di rotazione delle pulsar al millisecondo distribuite nella nostra Galassia. Sebbene ogni pulsar rappresenti un orologio cosmico di altissima precisione, il segnale osservato è comunque soggetto a rumore intrinseco. Per ridurre l'impatto di tale rumore, si impiega un insieme di pulsar: un vero e proprio rivelatore su scala galattica. Questa tecnica si basa sull'analisi di eventuali variazioni nei tempi di arrivo (*Time of Arrivals*, TOA) degli impulsi radio, confrontando le misure con un modello accurato che tiene conto di tutte le possibili sorgenti di ritardo. Eventuali discrepanze residue potrebbero quindi essere attribuite al passaggio di onde gravitazionali. I PTA sono particolarmente sensibili a GW a bassa frequenza ($\sim 10^{-9}$ Hz), rendendoli strumenti ideali per la ricerca di un fondo stocastico di onde gravitazionali (*Gravitational Wave Background*, GWB), generato dalla sovrapposizione incoerente di GW di origine cosmologica o astrofisica.

Il presente lavoro si concentra sulla riproduzione dell'analisi dei dati raccolti da uno dei principali esperimenti PTA: NANOGrav, che ad oggi ha monitorato 67 pulsar per un arco temporale di 15 anni. Vengono descritte le tecniche di analisi basate su metodi bayesiani, e la loro applicazione al dataset reale, utilizzando i tutorial forniti da NANOGrav. Particolare attenzione è rivolta allo studio della *Overlap Reduction Function* (ORF), che caratterizza la correlazione spaziale attesa per un fondo stocastico. Questa è stata confrontata con la curva teorica di Hellings & Downs (HD) per valutare la compatibilità del segnale osservato con un GWB, ottenendo un risultato consistente. L'analisi ha inoltre permesso di verificare la compatibilità dell'indice spettrale con il valore previsto per un fondo di origine astrofisica dovuto a sistemi binari di buchi neri supermassicci (*Supermassive Black Hole Binaries*, SMBHB). Sono stati infine confrontati diversi modelli teorici, sia per esplorare correlazioni spaziali alternative alla HD, sia per testare possibili estensioni nelle polarizzazioni attualmente previste dalla Relatività Generale.

La conferma definitiva della natura gravitazionale di questo segnale richiederà ulteriori dati e un miglioramento della sensibilità dei PTA, che permettano di distinguere in maniera inequivocabile la funzione di correlazione HD da possibili contaminazioni astrofisiche o sistematiche. L'eventuale conferma aprirebbe una nuova era dell'astronomia gravitazionale, offrendo l'opportunità unica di indagare la popolazione cosmica di SMBHB e di vincolare modelli di formazione ed evoluzione delle galassie su scale cosmologiche. Inoltre, l'accesso diretto a questo regime di frequenze permetterebbe di testare aspetti fondamentali della gravità in condizioni estreme, fornendo vincoli sulle possibili estensioni della GR e su scenari cosmologici primordiali.

Capitolo 1

Teoria delle onde gravitazionali

Le *onde gravitazionali* (GW) sono perturbazioni che si propagano come piccole increspature nello spazio-tempo che periodicamente allungano e comprimono la materia. Esse hanno origine dagli eventi più energetici dell'Universo quali stelle di neutroni rotanti, sistemi binari in collisione, esplosioni di supernovae e collassi gravitazionali nei buchi neri [12]. Albert Einstein predisse l'esistenza delle onde gravitazionali nel 1916, come soluzioni ondulatorie delle equazioni linearizzate di campo debole della Relatività Generale: onde trasversali di deformazione spaziale, che viaggiano alla velocità della luce, generate da variazioni temporali del momento di quadrupolo di massa della sorgente [1]. In assenza delle loro sorgenti, le GW, in analogia alle onde elettromagnetiche, possono anche essere definite come campi gravitazionali variabili nel tempo. La teoria della gravitazione è espressa dall'equazione di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

Concettualmente, ciò implica che la distribuzione localizzata della densità, caratterizzata dal tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$, curva lo spazio-tempo attorno alla sorgente [12], dove questa curvatura è descritta dal tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ e dal tensore metrico sottostante $g_{\mu\nu}$.

1.1 La teoria linearizzata della gravità

Se il campo gravitazionale è debole, è possibile trovare un sistema di coordinate tale che le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ siano piccole perturbazioni $h_{\mu\nu}$ della metrica piatta di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1.2}$$

Per comprendere le GW, è necessario studiare lo sviluppo delle equazioni di Einstein intorno alla metrica piatta, al primo ordine in $h_{\mu\nu}$: la teoria risultante è detta *teoria linearizzata*[16]. Le equazioni linearizzate possono essere scritte in modo compatto definendo $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ e $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h$; invertendo questa relazione, dato che $\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -h$, si ottiene $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$, il che permette di scrivere le equazioni di Einstein linearizzate nella forma:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.3}$$

dove $\Box = \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu$ è il d'Alembertiano nello spazio piatto.

Si può ora sfruttare la libertà di gauge, disponibile come una trasformazione infinitesima di coordinate definita da $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^\nu)$ con $|\partial_\nu \xi^\mu| \ll 1$, in cui ξ^μ deve soddisfare $\Box \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}$ (dove ora $\Box = (-\partial^2/\partial t^2 + \nabla^2)$), per ottenere:

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.4}$$

Questa condizione di gauge è chiamata *gauge di Lorentz*, che riduce le dieci componenti indipendenti della matrice simmetrica 4×4 $h_{\mu\nu}$ a sei componenti indipendenti, e porta alla semplice equazione d'onda:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

Inoltre, a causa della condizione di gauge di Lorentz, $T_{\mu\nu}$ soddisfa la legge di conservazione nello spazio piatto $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$.

1.2 Propagazione di GW monocromatiche

Un'onda gravitazionale in una regione molto distante dalla sorgente ($T_{\mu\nu} = 0$) può essere descritta nell'approssimazione di campo debole [18], assumendo la forma:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{1.6}$$

Questa è un'equazione d'onda tridimensionale, la cui soluzione può essere scritta come $\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik^\gamma x_\gamma)$, dove $\{A_{\mu\nu}\}$ e $\{k^\gamma\}$ sono componenti costanti di un qualche tensore, e vale $k^\nu k_\nu = 0$. Dal gauge di Lorentz segue che $A_{\mu\nu}k^\nu = 0$: $A_{\mu\nu}$ e k^ν sono ortogonali.

Un'ulteriore trasformazione di coordinate $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ con $\Box\xi_\mu = 0$ e quindi $\Box\xi_{\mu\nu} = 0$, continua a soddisfare le condizioni di gauge [16]; quindi, la trasformazione di $h_{\mu\nu}$ nel gauge di Lorentz mostra che, dalle sei componenti indipendenti di $\bar{h}_{\mu\nu}$, che soddisfano $\Box\bar{h}_{\mu\nu} = 0$, è possibile sottrarre le funzioni $\xi_{\mu\nu}$, che dipendono da quattro funzioni arbitrarie indipendenti ξ_μ tali che $\xi_{\mu\nu} = 0$. Si può quindi imporre $h^{0\mu} = 0$, $h^i{}_i = 0$, $\partial^j h_{ij} = 0$: questa è la definizione del gauge trasverso a traccia nulla *TT gauge*. Ogni onda gravitazionale piana monocromatica possiede quindi due gradi di libertà indipendenti, spesso detti *polarizzazioni* dell'onda.

Qualsiasi onda gravitazionale piana debole [12] $h_{ij}^{TT}(t, z)$ che si propaga nella direzione $\hat{n} \equiv z$ è descritta nel TT gauge dalla perturbazione metrica avente forma matriciale:

$$h_{ab}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times \\ h_\times & -h_+ \end{pmatrix}_{ab} cos[w(t - z/c)], \qquad a, b = 1{,}2 \tag{1.7}$$

dove a, b sono gli indici del piano trasverso (x, y); h_+ e $h_\times$ sono dette le ampiezze delle polarizzazioni *plus* e *cross* dell'onda [16] .

1.3 GW in uno background curvo

Per studiare se le GWs generano una curvatura [16], non possono essere definite come perturbazioni sulla metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$; bisogna piuttosto considerarle come perturbazioni su una metrica di un background curvo e dinamico $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$, e scrivere:

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{1.8}$$

Una separazione naturale tra il background dello spazio-tempo e le onde gravitazionali, sebbene approssimata, si ha quando c'è chiara separazione di scale: è la cosiddetta *approssimazione di onda corta* [12]. Considerando una GW con lunghezza d'onda λ che induce una curvatura dello spazio-tempo su scale dell'ordine della lunghezza d'onda ridotta, in molte situazioni astrofisiche realistiche essa è molto più piccola delle scale di lunghezza $\mathcal{L}$ su cui variano le curvature non dovute alle GWs, per cui vale $\lambda/2\pi \ll \mathcal{L}$.

1.4 Generazione di GW nella teoria linearizzata

Si consideri ora la generazione di onde gravitazionali nel contesto della teoria linearizzata. Per un sistema autogravitante, campi gravitazionali deboli implicano basse velocità all'interno della sorgente, mentre per sistemi dominati da forze non gravitazionali è sensato considerare sorgenti a campo debole con velocità arbitrarie. Richiamando (1.5), la soluzione dell'equazione di campo è:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t,\vec{x}) = \frac{4G}{c^4}\int \mathrm{d}^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x'}|}{c},\vec{x'})}{|\vec{x}-\vec{x'}|} \tag{1.9}$$

La tecnica più semplice per calcolare il campo di onde gravitazionali è data dal *formalismo del quadrupolo* [10], che richiede soltanto che i moti interni alla sorgente siano lenti o, equivalentemente, che la dimensione R della sorgente sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ della GW emessa e rispetto alla distanza r della sorgente dal punto di osservazione: $R \ll r \ll \lambda$. Nel TT gauge:

$$h_{ij}^{TT}(t) \approx \frac{2G}{c^4 r}\ddot{Q}_{ij}^{TT}(t-r/c) \tag{1.10}$$

dove Q^{ij} è il *momento di quadrupolo*:

$$Q^{ij} = \int \left(x^i x^j - \frac{1}{3}r^2\delta^{ij}\right)\rho(t,\vec{x}) \tag{1.11}$$

con $\rho = T^{00}/c^2$. Poiché compare solo il momento di quadrupolo di massa, si vede da (1.10) che non esiste radiazione gravitazionale monopolare o dipolare; ciò è dovuto al fatto che i termini di monopolo e dipolo dipendono rispettivamente dalle quantità conservate massa e momento totale della sorgente. Inoltre, h_{ij}^{TT} dipende dalle derivate dei momenti multipolari: una sorgente statica non irradia [16].

Il *tensore energia-impulso* per le GW si ottiene mediando spazialmente le equazioni di Einstein su diverse lunghezze d'onda; nel TT gauge esso ha componenti:

$$T_{\mu\nu}^{\mathrm{gw}} = \frac{c^4}{32\pi G}\langle \partial^\mu h_{TT}^{ij}\partial^\nu h_{ij}^{TT}\rangle \tag{1.12}$$

Il tensore $T_{\mu\nu}^{\mathrm{gw}}$ per un'onda gravitazionale piana che si propaga lungo z, assume la forma standard che si avrebbe per un fascio di particelle aventi massa a riposo nulla, che si muovono alla velocità della luce nella stessa direzione:

$$T_{00}^{\mathrm{gw}} = -T_{0z}^{\mathrm{gw}} = -T_{z0}^{\mathrm{gw}} = T_{zz}^{\mathrm{gw}} = \frac{c^2}{16\pi G}\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2\rangle \tag{1.13}$$

Dove T_{00}^{gw} rappresenta la densità di energia, e tutte le altre componenti sono nulle. L'effetto delle GW sulla curvatura del background è quindi formalmente identico a quello della materia avente tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}^{\mathrm{gw}}$.

Il *flusso di energia* corrispondente [16], cioè l'energia per unità di tempo delle onde gravitazionali che attraversa una superficie unitaria a grande distanza dalla sorgente:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}A} = c\ T_{00}^{\mathrm{gw}} = \frac{c^3}{16\pi G}\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2\rangle = \frac{G}{8\pi c^5 r^2}\langle \dddot{Q}_{TT}^{ij}\dddot{Q}_{ij}^{TT}\rangle \tag{1.14}$$

La potenza totale irradiata nell'approssimazione di quadrupolo, detta anche *luminosità gravitazionale* della sorgente, risulta quindi:

$$L_{\mathrm{gw}} = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}^{ij}\rangle \tag{1.15}$$

Capitolo 2

Pulsar Timing Arrays

Con *pulsar timing arrays* (PTAs) si intende una tecnica che utilizza i periodi di rotazione estremamente stabili di particolari stelle di neutroni, note come pulsar. Vengono impiegati come un rivelatore su scala galattica, con "bracci" che si estendono dalla Terra a ciascuna pulsar dell'array [5], alla ricerca di deviazioni correlate nei *residui temporali* causate da onde gravitazionali (GWs) a bassa frequenza che attraversano la Via Lattea. Si prevede che tramite PTA possa essere possibile rilevare un fondo stocastico di GWs emesso da sistemi binari di buchi neri supermassicci, nella finestra di frequenza compresa tra $\sim 10^{-9} - 10^{-7}$ Hz.

2.1 Pulsar

Le stelle di neutroni sono i nuclei collassati derivanti da un'esplosione di supernova e sono sostenute dalla pressione di degenerazione dei neutroni. Tendono a mostrare periodi rotazionali molto brevi e campi magnetici estremamente intensi a causa della loro elevata compattezza. In generale, l'asse magnetico non è allineato con l'asse di rotazione; la radiazione di dipolo magnetico, generata nell'atmosfera della stella di neutroni, si estende nello spazio, in modo simile al fascio luminoso di un faro. Se la Terra ricade all'interno di tale fascio di radiazione [5], allora la stella di neutroni può essere rilevata come sorgente di radiazione pulsata, altrimenti detta pulsar.

Questi impulsi emessi sono separati da un periodo fissato, pari al periodo di rotazione, e compaiono con una forma definita dalle proprietà del plasma nella magnetosfera della pulsar, che può variare notevolmente da una pulsar all'altra. La forma dell'impulso medio emesso è tipicamente stabile su scale temporali che vanno da minuti a decenni, al contrario del singolo impulso, che non è raro cambi da un periodo al successivo. Questo implica che, per una data pulsar, l'impulso emesso può essere mediato dopo aver tenuto conto del periodo rotazionale, risultando in una forma unica che caratterizza la pulsar stessa.

2.2 Pulsar al millisecondo

Pulsar aventi una rotazione estremamente regolare, che le rende quindi orologi intrinsecamente migliori rispetto alle ordinarie pulsar, sono dette *pulsar al millisecondo* (MSPs). Questo permette di misurare i tempi di arrivo (TOAs) dei loro impulsi con molta più precisione [14] rispetto a quelli delle altre pulsar; infatti, solitamente non presentano instabilità rotazionali come *timing noise* e *glitch*, tipiche delle normali pulsar.

Dopo i primi migliaia di anni dalla formazione della pulsar [5], quando il suo periodo rotazionale è diminuito sufficientemente per avere un impatto apprezzabile sul rallentamento della sua velocità di rotazione nel tempo *spindown* stesso (che ne rallenta l'evoluzione), se ha una stella

compagna i suoi strati atmosferici esterni possono cadere nel pozzo gravitazionale della pulsar e causare accrescimento di materia, accompagnato dall'aumento di momento angolare. La pulsar subisce una nuova accelerazione mentre il suo campo magnetico decade. Il risultato è proprio una *pulsar miliisecondo*, con periodi di rotazione compresi tra 1 ms e circa 30 ms. A causa del processo di accrescimento, le MSPs possiedono campi magnetici relativamente deboli e, di conseguenza, i loro tassi di *spindown* sono così bassi che si ritiene che le loro proprietà rotazionali ed emissive non evolvano in maniera significativa nel corso della loro vita.

2.3 Pulsar timing

Il *pulsar timing* si basa sull'utilizzo delle informazioni codificate nella forma dell'impulso per misurare il tempo di arrivo, in relazione a un template del profilo dell'impulso, quest'ultimo definito dal profilo mediato e che può essere considerato come privo di rumore.

Il profilo dell'impulso da misurare conterrà una certa quantità di rumore bianco *white noise*, che dipende dalle proprietà osservative della pulsar e dal sistema di osservazione [14] come $\sigma_{TOA}^{-1} \propto S/N$, dove σ_{TOA} è l'incertezza sul TOA e S/N è il rapporto segnale-rumore dell'osservazione. Il white noise è il fattore principale che limita la precisione del *pulsar timing*, nel senso che è presente in tutte le osservazioni ed è determinato in larga misura dalle proprietà intrinseche della pulsar, così come dalle capacità tecniche del telescopio.

2.3.1 Determinazione del modello di timing: residui temporali

Una volta che i TOAs sono stati misurati, essi devono essere confrontati con i tempi di arrivo previsti da un *modello di pulsar timing*, definito come una formula matematica che predice il tempo di arrivo di un impulso sulla base di un insieme di parametri del modello stesso.

I modelli di timing iniziali discendono da osservazioni di ricerca delle pulsar, da cui ottenere un periodo dell'impulso istantaneo tramite trasformata di Fourier. Monitorando l'evoluzione della frequenza degli impulsi su più osservazioni, si può determinare una stima dello spindown, che costituisce un modello di timing iniziale utilizzabile per predire la frequenza degli impulsi in osservazioni successive.

I TOAs misurati sulla Terra saranno però modulati da numerosi fattori dipendenti dal tempo [16], dovuti sia al moto della Terra attorno al Sole che del Sole attorno al baricentro del Sistema Solare, da effetti di Relatività Generale dovuti al campo gravitazionale del Sistema Solare e, infine, dall'eventuale moto della pulsar attorno alla sua compagna.

Per studiare gli effetti sul tempo di arrivo degli impulsi, è necessario innanzitutto trovare un'espressione che descriva la rotazione della pulsar in un sistema di riferimento comovente con la pulsar [14]. Poichè i processi fisici che ne causano lo spindown sono collegati alla frequenza di spin della pulsar, ed essa è un parametro osservabile, è conveniente svilupparla in serie di Taylor:

$$\nu(t) = \nu_0 + \dot{\nu}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\nu}_0(t - t_0)^2 + ... \tag{2.1}$$

dove $\nu_0 = \nu(t_0)$ è la frequenza di spin della pulsar in un'epoca di riferimento t_0 e $\dot{\nu}_0 = \dot{\nu}(t_0)$, $\ddot{\nu}_0 = \ddot{\nu}(t_0)$ sono le sue derivate temporali. Tuttavia, per le MSPs il valore di $\ddot{\nu}$ è solitamente troppo piccolo per essere misurato, oscurato quindi dalla presenza di *timing noise*.

Poiché la frequenza di spin è la velocità di variazione del numero di impulsi N, dalla (2.1) segue che

$$N = N_0 + \nu_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\dot{\nu}(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\ddot{\nu}(t - t_0)^3 + ... \tag{2.2}$$

dove N_0 è il numero di impulsi all'epoca di riferimento t_0. Se t_0 coincide con l'arrivo di un impulso e lo spindown della pulsar è noto con precisione, allora essi dovrebbero corrispondere a valori interi di N, quando osservati in un sistema di riferimento inerziale. Poiché la Terra non è un sistema inerziale, è necessario esprimere i TOAs topocentrici rispetto al centro di massa del Sistema Solare (SSB).

Il fulcro dell'analisi di pulsar timing è quello di minimizzare le differenze tra l'osservazione e il modello, note come *residui temporali*, realizzabile tramite l'ottimizzazione del modello di timing. Esso può essere perciò scritto in una forma che racchiude vari fattori:

$$t_{\mathrm{SSB}} = t_{\mathrm{topo}} + t_{\mathrm{corr}} - \Delta D/f^2 + \Delta_{R\odot} + \Delta_{S\odot} + \Delta_{E\odot} \tag{2.3}$$

Se il modello del timing sopra descritto risulta essere ottimale [5], i residui temporali consisteranno solo di white noise, accuratamente quantificato dalle incertezze sui TOAs.

2.3.2 Correzioni di orologio e frequenza

Il termine t_{corr} riassume le varie correzioni di orologio ai TOAs topocentrici, come l'incertezza ad essi associata o l'ora locale dell'osservatorio.

A causa della dispersione nel mezzo interstellare dovuta alla sua componente ionizzata, gli impulsi subiscono un ritardo di propagazione dipendente dalla frequenza [14], la cui correzione è data da $\Delta D = \mathcal{D} \times DM$, in termini della *dispersion measure* DM definita come l'integrale della densità degli elettroni (in cm^{-3}) lungo la distanza D (in parsec) tra il telescopio e la pulsar

$$DM = \int_0^D n_e \, \mathrm{d}l, \tag{2.4}$$

mentre $\mathcal{D}$ è la costante di dispersione definita come $\mathcal{D} \equiv e^2/(2\pi m_e c)$.

2.3.3 Correzioni baricentriche

Gli ultimi tre termini della (2.3) descrivono le correzioni necessarie per trasferire i TOAs topocentrici a TOAs baricentrici [14].

Il *ritardo di Römer*, $\Delta_{R\odot}$, è il tempo impiegato dall'impulso per coprire la distanza aggiuntiva lungo la linea di vista tra l'SSB e la pulsar, dovuto alla posizione della Terra nel suo moto orbitale. Dato un versore $\hat{s}$ che punta dall'SSB verso la posizione della pulsar e il vettore $\vec{r}$ che connette l'SSB all'osservatorio, si ottiene:

$$\Delta_{R\odot} = -\frac{1}{c}\vec{r} \cdot \hat{s} = -\frac{1}{c}(\vec{r_{\mathrm{SBB}}} + \vec{r_{\mathrm{EO}}}) \cdot \hat{s} \tag{2.5}$$

In cui c è la velocità della luce e si è scomposto $\vec{r}$ nelle due componenti $\vec{r}_{\mathrm{SBB}}$, che punta dall'SSB al centro della Terra (geocentro), e $\vec{r}_{\mathrm{EO}}$, che connette il geocentro al telescopio.

Il *ritardo di Shapiro*, $\Delta_{S\odot}$, è una correzione relativistica che rappresenta ritardi aggiuntivi causati dalla presenza di altre masse del Sistema Solare che curvano lo spazio-tempo. Sebbene

il contributo principale provenga dalla curvatura causata dal Sole, bisogna formalmente tenere in considerazione tutti i corpi:

$$\Delta_{S\odot} = -2\sum_i \frac{GM_i}{c^3}\ln\left[\frac{\hat{s}\cdot\vec{r}_i^E + r_i^E}{\hat{s}\cdot\vec{r}_i^P + r_i^P}\right] \tag{2.6}$$

dove G è la costante gravitazionale universale, M_i la massa del corpo i, $\vec{r}_i^P$ la posizione della pulsar relativamente a quel corpo e $\vec{r}_i^E$ la posizione del telescopio rispetto al corpo al momento del massimo avvicinamento del fotone.

L'ultimo termine, $\Delta_{E\odot}$, chiamato *ritardo di Einstein*, descrive l'effetto combinato della dilatazione temporale dovuta al moto della Terra e del redshift gravitazionale causato dagli altri corpi del Sistema Solare. La sua derivata risulta essere:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta_{E\odot}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{GM_i}{c^2 r_i^E} + \frac{v_E^2}{2c^2} - \text{constant} \tag{2.7}$$

La distanza r_i^E è quella tra la Terra e il corpo i di massa M_i, mentre v_E è la velocità della Terra rispetto al Sole. Si precisa quindi come nella sommatoria si considerino tutti i corpi del Sistema Solare eccetto la Terra.

Per le pulsar che si trovano in sistemi binari [5], è necessario considerare l'ulteriore trasformazione dal baricentro del sistema binario alla pulsar:

$$t_{\mathrm{SSB}} = t_{\mathrm{topo}} + t_{\mathrm{corr}} - \Delta D/f^2 + \Delta_{R\odot} + \Delta_{S\odot} + \Delta_{E\odot} + \Delta_{RB} + \Delta_{SB} + \Delta_{EB} + \Delta_{AB} \tag{2.8}$$

Essa include il ritardo di Römer Δ_{RB} dell'orbita binaria, così come effetti relativistici descritti dai ritardi di Shapiro Δ_{SB} e di Einstein Δ_{EB} dovuti al campo gravitazionale della compagna, ma può contenere anche effetti dovuti all'aberrazione variabile causata dal moto orbitale [14]. Per esprimere i TOAs nel baricentro del sistema binario non relativistico, si possono usare cinque dei sei *parametri Kepleriani*: (a) periodo orbitale P_b; (b) semiasse maggiore proiettato dell'orbita x; (c) eccentricità orbitale e; (d) longitudine del periastro ω; (e) epoca del passaggio al periastro T_0.

Confrontando i TOAs previsti dal modello con quelli misurati, si può valutare la bontà dei residui temporali ricavati, applicando il metodo dei minimi quadrati [16] e ottenendo la funzione χ^2 che, minimizzata, permette di migliorare la determinazione dei parametri della pulsar.

Questa descrizione non è però sufficiente per sistemi binari in cui gli effetti relativistici non possono essere trascurati; a tal fine è necessario introdurre solo cinque *parametri post-Kepleriani* [14]: (a) decadimento del periodo orbitale $\dot{P}_b$; (b) precessione relativistica del periastro $\dot{\omega}$; (d) ritardo di Einstein γ; (e) ritardo di Shapiro, definito da due parametri *range* r e *shape* s.

2.3.4 Timing noise

Probabilmente l'effetto più difficile da mitigare nel pulsar timing è il cosiddetto *timing noise* [5], termine genericamente applicato a qualsiasi residuo temporale che non sia white noise e che non possa essere corretto tramite alcuno dei parametri deterministici del modello di timing. Presumibilmente, questo rumore, tipicamente a lungo termine, è causato da instabilità

rotazionali intrinseche nella stella di neutroni stessa, sebbene il meccanismo fisico non sia ancora noto. Nelle MSPs, è stato dimostrato che il timing noise è molto meno comune o esiste solo a livelli molto più bassi. Tuttavia, man mano che la lunghezza dei data set di pulsar timing cresce e la precisione del timing aumenta, la diffusione del timing noise – e perciò l'importanza delle tecniche di mitigazione – continua a crescere anche nei progetti di timing che coinvolgono MSPs.

Di solito, il timing noise viene riconosciuto tramite la misura della derivata seconda della frequenza di spin della pulsar, $\ddot{\nu}$, fortemente incompatibile [14] con quanto atteso per una normale evoluzione dello spin: questo risulta nell'ottenimento di un indice di frenata della pulsar pari a $n = 3$. Questo indice può infatti essere determinato ammettendo che $\ddot{\nu}$ sia misurabile, come $n = \nu\ddot{\nu}/\dot{\nu}^2$. Se riflettesse il vero comportamento di spindown, dovrebbe assumere valori compresi tra $n = 1.4$ e $n = 2.9$. Ciò indica che l'assunzione $n = 3$ non dovrebbe essere corretta.

Un modo per rimuovere il timing noise [14] dai dati è includere derivate di ν di ordine successivo nel modello di timing, detto *polynomial whitening*. Facendo invece uso di un'altra tecnica, *harmonic whitening*, si può modellare il comportamento a lungo termine come una somma di onde sinusoidali armonicamente correlate, che viene sottratta dai residui temporali prima che venga effettuata l'analisi successiva.

2.4 Testare la gravità con le GW

Le onde gravitazionali sono riconosciute come un promettente test per le modifiche nella Relatività Generale [6]. Essa predice l'esistenza di GWs che viaggiano alla velocità della luce, sono trasverse e hanno due polarizzazioni, le standard *plus* e *cross*, mentre le teorie di gravità modificata possono invece predire l'esistenza di GWs con proprietà differenti. Per qualunque teoria in cui una metrica codifica la dinamica dello spazio-tempo, sono possibili sei polarizzazioni distinte di onda gravitazionale; queste componenti possono essere raggruppate in base al modo in cui si trasformano sotto rotazioni, ottenendo due componenti scalari, due componenti vettoriali e due componenti tensoriali. Di recente vi è stato un notevole interesse nell'utilizzare le osservazioni di GWs per cercare evidenze di queste polarizzazioni non-einsteiniane.

Per ciascuna coppia di pulsar, è possibile misurare la risposta correlata dei loro residui temporali, per poi studiarla in funzione della separazione angolare della coppia, θ; tipici esempi sono la risposta quadrupolare alle polarizzazioni standard *plus* e *cross* e la risposta dipolare alle due polarizzazioni vettoriali e alle due polarizzazioni scalari. Pertanto, la forma di questa funzione di correlazione angolare $\mathcal{C}_{ab}(\theta)$, sarà diversa a seconda del tipo di polarizzazione dell'onda gravitazionale osservata e che, dato un livello sufficiente di sensibilità dei PTA, può essere misurata.

Capitolo 3

Fondo stocastico di GW

I *sistemi binari di buchi neri supermassicci* (SMBHB), con masse nell'intervallo $(10^5 - 10^{10})M_\odot$, sono tra le principali sorgenti candidate di onde gravitazionali. Nella specifica finestra di frequenze $(10^{-9} - 10^{-7})$ Hz, il segnale più probabile da rilevare è un *fondo stocastico di GW* (GWB) [18] generato dalla sovrapposizione incoerente della radiazione gravitazionale proveniente dall'intera popolazione cosmica di SMBHB, sebbene possano essere osservate anche singole sorgenti. Le GW influenzano la propagazione dei segnali radio dalla pulsar al ricevitore sulla Terra, producendo una firma caratteristica nel tempo di arrivo degli impulsi radio. In generale, si calcola la differenza tra il tempo di arrivo atteso, fornito da un determinato modello, e il tempo di arrivo effettivo; i residui di questo fit contengono l'informazione fisica sugli effetti non modellizzati nella propagazione del segnale, incluse possibili GW. Finora, il fondo stocastico di GW da SMBHB nella finestra di frequenze $\sim 10^{-9} - 10^{-7}$ Hz è stato trattato come un segnale isotropo, gaussiano e stazionario, descritto da un'ampiezza caratteristica che segue una legge di potenza $h_c \propto f^{-2/3}$.

3.1 Sorgenti astrofisiche di GW

Spesso si classificano le sorgenti di GW in due modi: in base alla banda di frequenze in cui producono radiazione gravitazionale e, inoltre, in base ai processi dinamici coinvolti [10], distinguendo tra segnali *continui* e segnali lampo *burst* di onde gravitazionali. I primi possono essere generati da sorgenti che comportano un moto periodico con frequenza più o meno costante su scale temporali lunghe, mentre i segnali di breve durata costituiscono la seconda classificazione delle GW. È possibile avere anche processi casuali e continui nell'Universo, come la sovrapposizione incoerente di GW prodotte da un gran numero di sorgenti individuali. Questi segnali formano tipicamente un fondo di onde gravitazionali, la cui durata è molto più lunga del tempo di osservazione, con una radiazione che risulta in un processo stocastico.

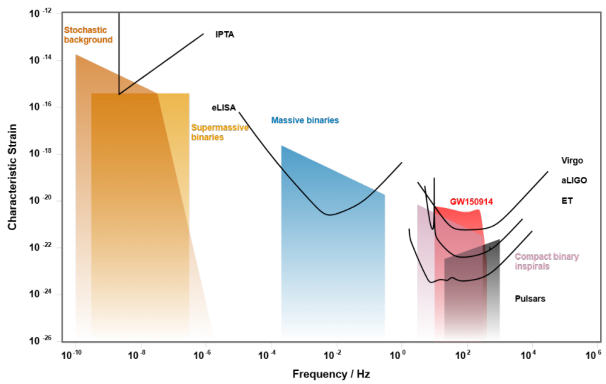


Figura 3.1: Grafico della *characteristic strain* in funzione della frequenza per una varietà di rivelatori e sorgenti. La figura è stata realizzata usando http://gwplotter.com.

Le GW sono disponibili in uno spettro di frequenze provenienti da molte fonti diverse. La figura 3.1 illustra lo spettro di deformazione *characteristic strain* delle GW nel corso di molti decenni in frequenza, con la sensibilità dei rilevatori attuali e pianificati sovrapposti alle bande delle sorgenti astrofisiche. Per la loro potenziale importanza, ci si concentra sullo studio dei fondi stocastici.

3.2 Sorgenti di un GWB

Ci sono buone ragioni per aspettarsi che l'Universo sia permeato da un GWB, emerso dalla sovrapposizione incoerente di un gran numero di sorgenti astrofisiche [16], troppo deboli per essere rilevate singolarmente, e tali che il numero di sorgenti che contribuisce a ciascun intervallo di frequenze sia molto maggiore di uno. Non può però essere scartata a priori la possibilità che esso sia stato generato dall'Universo primordiale.

Un dato fondo stocastico sarà caratteristico delle sorgenti che lo generano e potrebbe essere possibile discriminare fondi diversi, a condizione che le loro caratteristiche spettrali siano sufficientemente differenti [18]; si rivolga ora l'attenzione alle sorgenti cosmologiche e astrofisiche dei suddetti fondi stocastici di GW.

3.2.1 Fondi astrofisici

Tra i segnali di più interessanti di origine astrofisica [16], vi è proprio il fondo stocastico generato da molti sistemi binari di buchi neri supermassicci non risolti, già alla portata della sensibilità attuale dei *Pulsar Timing Arrays* (PTA).

Binarie di buchi neri supermassicci Le SMBHB, con masse nell'intervallo $10^6 - 10^{10} M_\odot$, sono attese come le sorgenti più brillanti di GW nella banda delle nanohertz. La formazione di una SMBHB inizia con la fusione di due galassie massive, ciascuna contenente il proprio buco nero supermassiccio, che vengono inizialmente spinte verso il centro del residuo della fusione dal processo di frizione dinamica, fino a formare una SMBHB legata gravitazionalmente attraverso le interazioni con il gas galattico, con le stelle e la materia oscura [6]. Con il restringersi del sistema binario per frizione dinamica, il suo periodo orbitale diventa sempre più corto e, per i valori di riferimento delle masse considerati, l'emissione di onde gravitazionali è in grado di contrastare questo comportamento solo quando il semiasse maggiore risulta dell'ordine $a = \mathcal{O}(0.01)$ pc, corrispondente a un periodo kepleriano di circa 30 anni, mentre per $a = \mathcal{O}(1)$ pc la reazione gravitazionale è del tutto trascurabile a questo scopo. La questione è quindi se esista un meccanismo in grado di colmare questo divario: questo problema, noto come *il problema dell'ultimo parsec* [15], è responsabile di una delle principali incertezze nella stima dell'abbondanza di SMBHB nel regime in cui la loro emissione di GW è significativa.

3.2.2 Fondi cosmologici

Riguardo i fondi cosmologici di GW, essi possono essere classificati in cinque principali categorie [7]: da fluttuazioni del vuoto quantistico durante l'inflazione standard *slow-roll*; da processi che operano all'interno di estensioni del paradigma inflazionistico standard; da preriscaldamento post-inflazionistico e relativi fenomeni non perturbativi; da transizioni di fase del primo ordine

(correlate o meno alla rottura della simmetria elettrodebole); e infine da difetti topologici, in particolare da stringhe cosmiche.

3.3 Effetto delle GW sul timing di una singola pulsar

Le fusioni di grandi galassie formano SMBHB, che sono attualmente il principale obiettivo dei PTA. Si calcoli innanzitutto come un'onda gravitazionale che passa tra la Terra e una pulsar influenzi la periodicità osservata degli impulsi sulla Terra [15]. Si indichi con $T_a = 1/\nu_a$ il periodo rotazionale della pulsar, e sia $f = \omega_{gw}/(2\pi)$ la frequenza della GW. È conveniente porsi in un sistema di riferimento in cui la Terra risulta nell'origine e si denoti con $\hat{n}$ la direzione di propagazione della GW e con $\hat{n}_a \equiv x$ il vettore unitario dalla Terra verso la pulsar, posta a distanza d_a lungo l'asse x.

Si adatta il calcolo del tempo di percorrenza della luce in un singolo braccio di un interferometro di onde gravitazionali nel TT gauge, considerando la Terra e la pulsar agli estremi del braccio, cosicché la loro distanza non venga alterata dal passaggio di una GW. L'intervallo spazio-temporale in unità naturali ($c = 1$) sarà:

$$ds^2 = -dt^2 + [\delta_{ij} + h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]dx^i dx^j \tag{3.1}$$

Si considera la propagazione di fotoni emessi dalla pulsar in $\vec{x} = d_a\hat{x}$ all'istante di emissione t_{em}, diretti verso l'osservatore in $\vec{x} = 0$. La condizione che il fascio luminoso che si propaga lungo $-\hat{x}$ (per cui $i, j = x$) percorra geodetiche nulle, $ds^2 = 0$, porta ad avere:

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + h_{xx}^{TT}[t,\ \vec{x}(t)]}} = -\left[1 - \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}[t,\ \vec{x}(t)]\right]\mathrm{d}t \tag{3.2}$$

dove $\vec{x}(t)$ è la traiettoria del fotone e la seconda uguaglianza vale al primo ordine in h. Il tempo di arrivo t_{obs} all'osservatore è:

$$d_a = \int_{t_{obs}}^{t_{em}} \mathrm{d}\vec{x} = \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \mathrm{d}t' \left[1 - \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}[t',\ \vec{x}(t')]\right] = t_{obs} - t_{em} - \frac{1}{2}\int_{t_{em}}^{t_{obs}} \mathrm{d}t'\ h_{xx}^{TT}[t',\ \vec{x}(t')] \tag{3.3}$$

Poiché h_{xx}^{TT} è una quantità piccola, al primo ordine nell'integrale si può sostituire t_{obs} con il suo valore all'ordine zero $t_{obs} = t_{em} + d_a$ e, per la traiettoria del fotone, assumere il cammino non perturbato $\vec{x}(t) = (t_{obs} - t)\ \hat{n}_a$. Sostituendo h_{xx}^{TT} con $n_a^i n_a^j h_{ij}^{TT}$ per considerare una generica direzione $\hat{n}_a$:

$$t_{obs} = t_{em} + d_a + \frac{n_a^i n_a^j}{2}\int_{t_{em}}^{t_{em}+d_a} \mathrm{d}t'\ h_{ij}^{TT}[t', (t_{em} + d_a - t')\hat{n}_a] \tag{3.4}$$

Si considerino ora i fotoni emessi dopo un periodo di rotazione della pulsar, cioè a $t'_{em} = t_{em} + T_a$, che verranno osservati a t'_{obs}:

$$\begin{aligned} t'_{obs} &= t'_{em} + d_a + \frac{n_a^i n_a^j}{2}\int_{t'_{em}}^{t'_{em}+d_a} \mathrm{d}t'\ h_{ij}^{TT}[t',\ (t'_{em} + d_a - t')\hat{n}_a] = \\ &= t_{em} + T_a + d_a + \frac{n_a^i n_a^j}{2}\int_{t_{em}+T_a}^{t_{em}+T_a+d_a} \mathrm{d}t'\ h_{ij}^{TT}[t',\ (t_{em} + T_a + d_a - t')\hat{n}_a] = \\ &= t_{em} + T_a + d_a + \frac{n_a^i n_a^j}{2}\int_{t_{em}}^{t_{em}+d_a} \mathrm{d}t''\ h_{ij}^{TT}[t'' + T_a,\ (t_{em} + d_a - t'')\hat{n}_a] \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove $t'' = t' - T_a$. Sottraendo i due tempi di arrivo, $t'_{obs} - t_{obs} = T_a + \Delta T_a$, con

$$\Delta T_a = \frac{n_a^i n_a^j}{2} \int_{t_{em}}^{t_{em}+d_a} \mathrm{d}t' \ \{h_{ij}^{TT}[t' + T_a,\ \vec{x}_0(t')] - h_{ij}^{TT}[t',\ \vec{x}_0(t')]\} \tag{3.6}$$

in cui $\vec{x}_0(t') = (t_{em} + d_a - t')\hat{n}_a$. Dunque, l'intervallo temporale con cui gli impulsi sono visti dall'osservatore è uguale al periodo di rotazione della pulsar (tipicamente dell'ordine del millisecondo), più un termine extra ΔT_a, detto *ritardo temporale*, indotto dall'onda gravitazionale. Tuttavia, quelle rilevabili con *pulsar timing* hanno periodi $T_{gw} = 2\pi/\omega_{gw}$ dell'ordine del tempo di osservazione, $1 - 10$ anni: quindi $\omega_{gw} T_a$ è una quantità estremamente piccola, e in (3.6) si può sviluppare in serie di Taylor $h_{ij}^{TT}[t' + T_a,\ \vec{x}_0(t')]$ al primo ordine in T_a:

$$\frac{\Delta T_a}{T_a} = \frac{n_a^i n_a^j}{2} \int_{t_{em}}^{t_{em}+d_a} \mathrm{d}t' \ \left[\frac{\partial}{\partial t'} h_{ij}^{TT}(t', \vec{x})\right]_{\vec{x}=\vec{x}_0(t')} \tag{3.7}$$

Per un'onda gravitazionale monocromatica che si propaga lungo la direzione $\hat{n}$, si scriverà:

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \mathcal{A}_{ij}(\hat{n}) \ \sin[\omega_{gw}(t - \hat{n} \cdot \vec{x})] \ , \qquad n^i \mathcal{A}_{ij}(\hat{n}) = 0. \tag{3.8}$$

Sostituendo in (3.7) ed eseguendo l'integrale:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T_a}{T_a} &= \frac{n_a^i n_a^j}{2} \int_{t_{em}}^{t_{em}+d_a} dt' \, [-\mathcal{A}_{ij}(\hat{n}) \, \omega_{gw} \sin[\omega_{gw}(t' - \hat{n} \cdot \vec{x}_0(t'))]] = \\
&= -\frac{n_a^i n_a^j \mathcal{A}_{ij}(\hat{n})}{2(1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_a)} \cos\{\omega_{gw}[t'(1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_a) - (\hat{n} \cdot \hat{n}_a)(t_{em} + d_a)]\}\Big|_{t_{em}}^{t_{em}+d_a} = \\
&= -\frac{n_a^i n_a^j \mathcal{A}_{ij}(\hat{n})}{2(1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_a)} \{\cos[\omega_{\mathrm{gw}}(t_{em} + d_a)] - \cos[\omega_{\mathrm{gw}}(t_{em} - (\hat{n} \cdot \hat{n}_a) d_a)]\} = \\
&= -\frac{n_a^i n_a^j \mathcal{A}_{ij}(\hat{n})}{2(1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_a)} \{\cos[\omega_{\mathrm{gw}} t_{obs}] - \cos[\omega_{\mathrm{gw}}((t_{obs} - \tau_a) - \tau_a(\hat{n} \cdot \hat{n}_a))]\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

In cui si è scritto il tempo impiegato dalla luce in unità naturali come $\tau_a \equiv t_{obs} - t_{em} \equiv d_a$. Scrivendo t_{obs} semplicemente come t e definendo la quantità *redshift*:

$$z(t) \equiv \left(\frac{\nu_0 - \nu(t)}{\nu_0}\right)_a \implies z_a(t) = -\frac{\Delta \nu_a}{\nu_a} = \frac{\Delta T_a}{T_a} \tag{3.10}$$

Se $s_a = d_a \hat{n}_a = \tau_a \hat{n}_a$ è la posizione della pulsar mentre $\vec{x} = 0$ è la posizione dell'osservatore, allora (3.9) può essere scritta come:

$$z_a(t) = \frac{n_a^i n_a^j}{2(1 + \hat{n} \cdot \hat{n}_a)} [h_{ij}^{TT}(t, \vec{x} = 0) - h_{ij}^{TT}(t - \tau_a,\ \vec{x}_a)] \tag{3.11}$$

Infine, si definiscono i *residui temporali* $R_a(t)$ dell'α-esima pulsar, misurati rispetto a un tempo di riferimento $t = 0$:

$$R_a(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' \ z_a(t') \tag{3.12}$$

I residui temporali risultano perciò pari all'integrale sul tempo di osservazione del redshift indotto dal passaggio di un'onda gravitazionale.

3.4 Risposta a un fondo stocastico di GW

Si applichi ora (3.11) a un fondo stocastico di GW [15]. L'ampiezza dell'onda gravitazionale risultante da una sovrapposizione di onde a qualsiasi frequenza e provenienti da qualsiasi direzione può essere scritta come:

$$h_{ij}(t,\vec{x}) = \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f \int \mathrm{d}^2\hat{n}\ \tilde{h_A}(f,\hat{n})\ e_{ij}^A(\hat{n})\ e^{-2\pi i f(t-\hat{n}\cdot\vec{x})} \tag{3.13}$$

dove i tensori di polarizzazione e_{ij}^A [16] assumono la forma: $e_{ij}^+(\hat{n}) = \hat{u}_i\hat{u}_j - \hat{v}_i\hat{v}_j$ e $e_{ij}^\times(\hat{n}) = \hat{u}_i\hat{v}_j + \hat{v}_i\hat{u}_j$, con $\hat{u},\hat{v}$ vettori unitari ortogonali sia alla direzione di propagazione $\hat{n}$ che tra di loro.

Si lavora nel TT gauge, in modo che $h_i^i = \partial^j h_{ij} = 0$, dove gli indici $i,j = 1,2,3$ indicano la sovrapposizione di onde provenienti da tutte le possibili direzioni [15]. Inserendo questa espressione in (3.11) si ottene:

$$\begin{aligned} z_a(t) &= \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f \int \mathrm{d}^2\hat{n}\ \tilde{h_A}(f,\hat{n})\ \frac{n_a^i n_a^j\ e_{ij}^A(\hat{n})}{2(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)} \left[e^{-2\pi i f t} - e^{-2\pi i f(t-\tau_a-\hat{n}\cdot\vec{x}_a)}\right] = \\ &= \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f \int \mathrm{d}^2\hat{n}\ \tilde{h_A}(f,\hat{n})\ F_a^A(\hat{n})\ e^{-2\pi i f t} \left[1 - e^{-2\pi i f \tau_a(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)}\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

in cui si è imposto $F_a^A(\hat{n}) = \frac{n_a^i n_a^j e_{ij}^A(\hat{n})}{2(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)}$ e $\vec{x}_a = d_a\hat{n}_a = \tau_a\hat{n}_a$.

Per un GWB bisogna però considerare più di una pulsar: prese due pulsar a e b, si dovrà quindi calcolare $\langle z_a(t) z_b(t)\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle z_a(t) z_b(t)\rangle = \langle \sum_{A=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f \int \mathrm{d}^2\hat{n}\ \tilde{h}_A^*(f,\hat{n})\ F_a^A(\hat{n})\ e^{-2\pi i f t} \left[1 - e^{-2\pi i f \tau_a(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)}\right] \cdot \\ \cdot \sum_{A'=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}^2\hat{n}'\ \tilde{h_{A'}}(f',\hat{n}')\ F_b^{A'}(\hat{n}')\ e^{-2\pi i f' t} \left[1 - e^{-2\pi i f' \tau_b(1+\hat{n}'\cdot\hat{n}_b)}\right]\rangle \end{aligned} \tag{3.15}$$

Un fondo stocastico è definito dal fatto che le ampiezze $\tilde{h_A}(f,\hat{n})$ sono variabili casuali [16], caratterizzate statisticamente dai loro valori medi di insieme $\langle ...\rangle$:

$$\begin{aligned} = \sum_{A,A'=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}^2\hat{n} \int \mathrm{d}^2\hat{n}'\ F_a^A(\hat{n})\ F_b^{A'}(\hat{n}')\ e^{-2\pi i f t} \left[1 - e^{-2\pi i f \tau_a(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)}\right] \cdot \\ \cdot e^{-2\pi i f' t} \left[1 - e^{-2\pi i f' \tau_b(1+\hat{n}'\cdot\hat{n}_b)}\right]\ \langle \tilde{h}_A^*(f,\hat{n})\ \tilde{h_{A'}}(f',\hat{n}')\rangle \end{aligned} \tag{3.16}$$

Assumendo che il fondo sia stazionario, isotropico e non polarizzato, esso è univocamente caratterizzato dalla densità spettrale $S_h(f)$, definita da:

$$\langle \tilde{h}_A^*(f,\hat{n})\ \tilde{h_{A'}}(f',\hat{n}')\rangle = \delta(f-f')\frac{\delta^2(\hat{n},\hat{n}')}{4\pi}\delta_{AA'}\frac{1}{2}S_h(f) \tag{3.17}$$

Si può quindi riscrivere:

$$\begin{aligned} = \sum_{A,A'=+,\times} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f' \int \mathrm{d}^2\hat{n} \int \mathrm{d}^2\hat{n}'\ F_a^A(\hat{n}) F_b^{A'}(\hat{n}')\ e^{-2\pi i f t} \left[1 - e^{-2\pi i f \tau_a(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)}\right] \\ \cdot e^{-2\pi i f' t} \left[1 - e^{-2\pi i f' \tau_b(1+\hat{n}'\cdot\hat{n}_b)}\right] \cdot \delta(f-f')\frac{\delta^2(\hat{n},\hat{n}')}{4\pi}\delta_{AA'}\frac{1}{2}S_h(f) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Per via della delta di Kronecker $\delta_{AA'}$, della delta di Dirac $\delta(f-f')$ e della delta di Dirac sulla sfera bidimensionale $\delta^2(\hat{n},\hat{n}')$, rimane:

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f\ S_h(f) \int \frac{\mathrm{d}^2\hat{n}}{4\pi}\ \mathcal{K}_{ab}(f,\hat{n}) \sum_{A=+,\times} F_a^A(\hat{n})\ F_b^A(\hat{n}) \tag{3.19}$$

con $\mathcal{K}_{ab}(f,\hat{n}) = \left[1 - e^{-2\pi i f \tau_a(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_a)}\right]\left[1 - e^{-2\pi i f \tau_b(1+\hat{n}\cdot\hat{n}_b)}\right]$.

Anche considerando la pulsar al millisecondo più vicina (avente periodo maggiormente stabile rispetto alle ordinarie pulsar) e il valore minimo nella banda di frequenze dei PTA, è legittimo approssimare $\mathcal{K}_{ab}(f,\hat{n}) \to 1$, in quanto contenente termini in diversi punti spazio-temporali che sono esponenziali rapidamente oscillanti e contribuiscono perciò in modo trascurabile nell'integrale sulle frequenze. Il risultato finale:

$$\langle z_a(t) z_b(t)\rangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f\ S_h(f) \int \frac{\mathrm{d}^2\hat{n}}{4\pi} \sum_{A=+,\times} F_a^A(\hat{n}) F_b^A(\hat{n}) \tag{3.20}$$

L'integrale angolare può quindi essere effettuato analiticamente scrivendo
$\hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ e scegliendo $\hat{u} = (\sin\phi, -\cos\phi, 0)$,
$\hat{v} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta)$:

$$\mathcal{C}(\theta_{ab}) = \int \frac{\mathrm{d}^2\hat{n}}{4\pi} \sum_{A=+,\times} F_a^A(\hat{n}) F_b^A(\hat{n}) = x_{ab}\ln x_{ab} - \frac{1}{6}x_{ab} + \frac{1}{3} \tag{3.21}$$

dove $x_{ab} = 1/2(1-\cos(\theta_{ab}))$ e θ_{ab} è l'angolo relativo tra le due pulsar. Questa espressione per $\mathcal{C}(\theta_{ab})$ è stata trovata per la prima volta da Hellings e Downs, ed è nota come *curva Hellings & Downs*. Questa correlazione angolare è esattamente ciò che viene ricercato nelle analisi dei Pulsar Timing Arrays come NANOGrav, e costituisce la firma del fondo stocastico.

3.5 GWB di sorgenti astrofisiche

Esiste un semplice teorema che permette di calcolare il fondo stocastico generato dalla sovrapposizione di segnali provenienti da molte sorgenti individuali a distanze cosmologiche [15].

Sia f_r la frequenza delle onde gravitazionali nel sistema di riferimento comovente alla sorgente, e f la frequenza osservata oggi sulla Terra (sistema dell'osservatore a riposo). Se la sorgente si trova a redshift cosmologico z, allora $f = f_r/(1+z)$ [17]. Si supponga inizialmente che esista un insieme di sorgenti con densità numerica $N(z)dz$ (ovvero il numero di eventi per unità di volume comovente) nell'intervallo di redshift $[z,\ z+dz]$, ciascuna delle quali produce lo stesso spettro energetico di GW nel proprio sistema di riferimento, tale che l'energia totale emessa nell'intervallo di frequenze $[f_r,\ f_r + \mathrm{d}f_r]$ sia $\frac{\mathrm{d}E_{gw}}{\mathrm{d}f_r}\,\mathrm{d}f_r$. Si definisca $\Omega_{gw}(f)$ come la densità attuale di energia $\mathrm{d}\rho_{gw}$ per intervallo logaritmico di frequenza $\mathrm{d}\ln f = \mathrm{d}f/f$, divisa per la densità energetica della massa a riposo $\rho_c c^2$ necessaria a chiudere l'Universo. Allora la densità di energia in radiazione gravitazionale attuale totale è:

$$\mathcal{E}_{gw} \equiv \frac{\mathrm{d}\rho_{gw}}{\mathrm{d}\ln f}(f) = \int_0^{\infty} p_c c^2\ \Omega_{gw}(f)\frac{\mathrm{d}f}{f} = \int_0^{\infty} \frac{\pi}{4}\frac{c^2}{G} f^2 h_c^2(f)\frac{\mathrm{d}f}{f} \tag{3.22}$$

dove $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$ è la densità critica dell'universo e h_c è l'ampiezza caratteristica dell'onda gravitazionale di un fondo stocastico. In un universo omogeneo e isotropo, la densità di energia attuale $\mathcal{E}_{gw}$ deve essere uguale alla somma delle densità di energia irradiate dalle sorgenti a ciascun redshift, osservata ridotta di un fattore $(1+z)$ per tener conto del redshift subito dai gravitoni dall'emissione all'osservazione:

$$\mathcal{E}_{gw} = \int_0^\infty \int_0^\infty N(z)\ dz \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{dln}f}\mathrm{dln}f = \int_0^\infty \int_0^\infty dz\ \frac{N(z)}{1+z}\frac{\mathrm{d}E_{gw}}{\mathrm{dln}f_r} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty dz\ \frac{N(z)}{1+z}\frac{\mathrm{d}E_{gw}}{\mathrm{d}f_r} f_r \frac{\mathrm{d}f_r}{f_r} = \int_0^\infty \int_0^\infty dz \frac{N(z)}{1+z}\frac{\mathrm{d}E_{gw}}{\mathrm{d}f_r} f_r \frac{\mathrm{d}f}{f} \tag{3.23}$$

con $\mathrm{d}f_r = (1+z)\mathrm{d}f$ e $\mathrm{d}\ln f = \mathrm{d}\ln f_r$. Uguagliando (3.22), (3.23) frequenza per frequenza, si ottiene

$$\mathcal{E}_{gw} = p_c c^2\ \Omega_{gw}(f) = \frac{\pi}{4}\frac{c^2}{G} f^2 h_c^2(f) = \int_0^\infty \mathrm{d}z\ \frac{N(z)}{1+z}\left(\frac{\mathrm{d}E_{gw}}{\mathrm{d}f_r} f_r\right)\Big|_{f_r = f(1+z)} \tag{3.24}$$

L'interpretazione fisica di questo teorema è che la densità di energia in onde gravitazionali per intervallo logaritmico di frequenza è pari alla densità comovente di eventi residui, moltiplicata per l'energia (redshiftata) che ciascun evento ha prodotto per intervallo logaritmico di frequenza. Essa non dipende dal modello cosmologico, salvo l'assunzione di un universo omogeneo e isotropo.

3.6 GWB proveniente da SMBHB

Si può ora applicare il risultato alle GW prodotte da sistemi binari di SMBH, considerando innanzitutto il regime dinamico in cui la contrazione dell'orbita è determinata unicamente dall'emissione delle onde gravitazionali [15].

Nel limite newtoniano, per un sistema binario circolare di massa di chirp M_c, in cui le componenti fondono per effetto delle perdite da radiazione gravitazionale in un tempo inferiore all'età dell'Universo, vale:

$$\frac{\mathrm{d}E_{gw}}{\mathrm{d}f_r} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{G}\frac{(GM)^{5/3}}{(\pi f_r)^{1/3}} \qquad \text{per} \quad f_{min} < f_r < f_{max} \tag{3.25}$$

Il limite inferiore f_{min} è fissato dalla separazione del sistema al momento della sua formazione e, durante la loro vita, i sistemi in fase di fusione emettono un ampio spettro di frequenze, fino a un limite superiore f_{max} al quale la dissipazione mareale inizia a dominare sulla radiazione gravitazionale nel determinare l'evoluzione orbitale [17]. Inserendo l'equazione (3.25) nella (3.6), si ottiene il fondo di onde gravitazionali a $f < f_{max}$ da una popolazione di sistemi binari spiraleggianti, trascurando quelli la cui separazione iniziale è così ampia che il tempo di fusione è molto maggiore del tempo di Hubble alla loro nascita (per i quali quindi $f_{max} \simeq f_{min}$), e che qui vengono omessi:

$$p_c c^2\ \Omega_{gw}(f) = \frac{\pi}{4}\frac{c^2}{G} f^2 h_c^2(f) = \int_0^\infty \mathrm{d}z\ \frac{N(z)}{1+z}\left(f_r\ \frac{\pi}{3}\frac{1}{G}\frac{(GM)^{5/3}}{(\pi f_r)^{1/3}}\right) \tag{3.26}$$

da cui:

$$\Omega_{gw} = \frac{8\pi^{5/3}}{9}\ \frac{1}{c^2 H_0^2}\ (GM)^{5/3}\ f^{2/3}\ N_0\langle(1+z)^{-\frac{1}{3}}\rangle \propto f^{2/3} \tag{3.27}$$

$$h_c^2(f) = \frac{4}{3\pi^{1/3}} \frac{1}{c^2} \frac{(GM)^{5/3}}{f^{4/3}} N_0 \langle (1+z)^{-\frac{1}{3}} \rangle \propto f^{-4/3} \tag{3.28}$$

dove $N_0 = \int_0^\infty N(z)\mathrm{d}z$ è la densità comovente attuale dei resti fusi, e

$$\langle (1+z)^{-\frac{1}{3}} \rangle = \frac{1}{N_0} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{N(z)}{(1+z)^{1/3}} \, \mathrm{d}z \tag{3.29}$$

Pertanto, nel modello più semplice [6], un insieme di SMBHB dovrebbe produrre un fondo stocastico di GW con una *characteristic strain* $h_c = A\ f^{-2/3}$ ($\Omega_{gw}(f) \propto f^{2/3}$) e con un'ampiezza A dell'ordine di $\mathcal{O}[10^{-15}](\mathcal{O}[10^{-9}])$ a una frequenza di onda gravitazionale di 1 $year^{-1}$.

Capitolo 4

Analisi dati delle GW

La prima rilevazione, seppur indiretta, dell'esistenza delle onde gravitazionali risale al 1974, tramite l'osservazione della ormai famosa pulsar Hulse e Taylor, PSR B1913+16, presso l'Osservatorio di Arecibo a Porto Rico. La loro esistenza è stata però confermata solo recentemente dalla diretta rilevazione del segnale GW150914 con i rivelatori di Advanced LIGO nel 2015, proveniente da un sistema binario di buchi neri di massa stellare. La discrepanza temporale tra queste due scoperte è attribuibile all'estrema debolezza del segnale di una tipica GW, immerso nel rumore del rivelatore stesso. Essendo i dati provenienti dal rivelatore realizzazioni di processi stocastici [12], l'analisi dati si riduce a un problema puramente statistico, che permette di scindere un eventuale passaggio di onda gravitazionale dal rumore.

4.1 Estrazione del segnale GW dal rumore

Supponendo che la serie temporale, output di un rivelatore, sia lineare, possono essere distinti due scenari:

$$\text{Ipotesi nulla } \mathcal{H}_0 : s(t) = n(t)$$
$$\text{Ipotesi alternativa } \mathcal{H}_1 : s(t) = n(t) + h(t)$$

Nei dati $s(t)$ sarà sicuramente presente il rumore $n(t)$ (un processo casuale) del rivelatore e, in aggiunta, un possibile segnale di onde gravitazionali $h(t)$: ciò che è interesse di studio è proprio il secondo caso, in cui ci si propone di estrarre il segnale $h(t)$ forniti i dati $s(t)$. Poiché l'utilizzo di più rivelatori è più vantaggioso, il problema si riconduce all'analisi di numerose serie temporali; essa viene realizzata con l'*inferenza Bayesiana* [11], che semplifica enormemente il lavoro nell'ipotesi non banale in cui $h(t)$ non sia un segnale deterministico e ben noto [12], ma bensì sia un processo stocastico.

4.2 Inferenza Bayesiana

Esistono principalmente due approcci all'inferenza statistica [19], detti *frequentista* (o classico) e *bayesiano*.

Nell'approccio *frequentista*, i parametri di un modello sono considerati valori fissi ma sconosciuti, mentre i dati sono visti come realizzazioni di variabili casuali; qualunque fonte di incertezza risiede quindi nei dati stessi. Ci si chiede, ad esempio, quante volte ci si aspetta di ottenere una particolare realizzazione di dati d assumendo che il modello $\mathcal{H}$ con parametri θ sia corretto. Formalmente, questo è descritto dalla distribuzione di probabilità $p(d|\theta, \mathcal{H})$, spesso chiamata *likelihood* dei dati.

Al contrario, nell'approccio *bayesiano* i parametri sono trattati come variabili casuali, e l'inferenza si concentra sulla probabilità dei parametri dati i dati osservati. A partire dal singolo set di dati raccolto, si costruisce così una distribuzione a posteriori *posterior* $p(\theta|d)$, che rappresenta il grado di credenza nei valori dei parametri alla luce delle osservazioni ed è fornita dal *Teorema di Bayes*:

$$p(\theta|d) = \frac{p(d|\theta)\ p(\theta)}{p(d)} \tag{4.1}$$

A partire da una distribuzione a priori *prior* $p(\theta)$, che limita i valori possibili dei parametri θ del modello ma può essere scelta in modo poco vincolante (ad esempio una distribuzione gaussiana ampia o una uniforme su scala logaritmica per coprire un ampio intervallo di valori), e combinandola con la funzione di *likelihood* $p(d|\theta)$, che valuta quanto i parametri θ del modello si adattano ai dati osservati, è possibile ottenere la distribuzione a posteriori $p(\theta|d)$ tramite il Teorema di Bayes. Il fattore di normalizzazione $p(d)$, detto evidenza *evidence*, garantisce che la distribuzione a posteriori sia correttamente normalizzata. In questo modo, scegliendo priors debolmente informativi, ci si assicura che la distribuzione a posteriori sia dominata dai dati raccolti sperimentalmente.

Questo teorema viene solitamente implementato mediante tecniche numeriche di campionamento emphsampling, in cui l'evidenza può essere ignorata per stimare i parametri *parameter estimation*, ma non nella selezione del modello *model selection*.

4.2.1 Parameter estimation

Avendo un modello definito da un insieme di parametri $\theta = \{x, y, z\}$, mediante il teorema di Bayes (4.1) si otterrà una distribuzione a posteriori multidimensionale [11]. L'inferenza Bayesiana permette però, se necessario, di ridurla a una rappresentazione dei soli parametri d'interesse, tramite integrazione analitica su quelli non rilevanti:

$$p(x|d) = \int p(x, y, z|d)\ dy\ dz \tag{4.2}$$

Questo metodo è perciò detto marginalizzazione, in cui non si fissano i parametri di disturbo, ma ne si integra l'intera distribuzione di probabilità, che ne comporta quindi la propagazione delle loro incertezze sulla stima dei parametri che si vogliono studiare. Il valore della distribuzione di probabilità marginale unidimensionale ottenuta può essere valutato in vari modi [19], uno dei quali è la mediana (50% quantile), la cui incertezza viene stimata definendo regioni di credibilità, che sono l'equivalente bayesiano del concetto di σ in una Gaussiana.

4.2.2 Model selection

Se si hanno più modelli ipotetici riferiti a uno stesso fenomeno fisico, può essere utile poter quantificare quale parametrizzazione sia maggiormente supportata dai dati osservati: un metodo fortemente utilizzato nelle ricerche che coinvolgono PTA è la tecnica *in-sample*, che permette di riassumere il grado di adattamento di un modello rispetto a un altro in un unico numero. Partendo dalla definizione di evidenza di un modello come integrale della likelihood pesata dal prior sull'intero spazio degli n parametri del modello, si ha:

$$p(d) \equiv \mathcal{Z} = \int p(d|\theta)p(\theta)\mathrm{d}^n\theta \tag{4.3}$$

Si definisce quindi il rapporto di probabilità a posteriori di due modelli, ottenuto moltiplicando il rapporto tra le evidenze per il rapporto delle probabilità a priori. Poiché però quest'ultimo viene posto spesso unitario, il fattore che permette di valutare l'adattamento di un modello parametrizzato rispetto a un altro è proprio il rapporto tra le evidenze $\mathcal{Z}_1$ e $\mathcal{Z}_2$, noto come *fattore di Bayes* (*Bayes Factor*, BF) del modello $\mathcal{H}_1$ rispetto al modello $\mathcal{H}_2$:

$$\mathcal{B}_{12} = \frac{\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2} \tag{4.4}$$

Un valore di $\ln \mathcal{B}_{12} > 1$ è comunemente interpretato come evidenza forte a favore di $\mathcal{H}_1$ rispetto a $\mathcal{H}_2$.

4.2.3 Tecniche bayesiane numeriche

Poiché le distribuzioni a posteriori spesso non hanno una forma funzionale semplice, la loro implementazione avviene mediante tecniche di campionamento casuale. In generale, i calcoli bayesiani vengono eseguiti mediante due metodi [11]: *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) e *Nested Sampling*. La principale differenza tra i due è attribuibile al fatto che MCMC produce i campioni dalla distribuzione a posteriori senza valutare direttamente l'evidence, al contrario del Nested Sampling [4], che invece calcola l'integrale dato dall'evidence senza campionare la distribuzione a posteriori. MCMC è perciò maggiormente utilizzato quando si parla di analisi di GW tramite PTA. Un aspetto importante risiede nel fatto che MCMC permetta di raggiungere la convergenza del campionamento della data distribuzione stazionaria indipendentemente dallo stato iniziale dell'esplorazione dei parametri [19], a patto che vengano effettuati un numero sufficiente di passi iterativi.

Per assicurarsi l'indipendenza dei campioni, si può applicare il processo di *thinning* della catena.

4.3 PTA Likelihood

La costruzione della PTA likelihood [19] inizia con la comprensione dei fattori costituenti i TOA. Essi possono essere modellizzati come somma di una parte deterministica $\vec{t}_{\mathrm{det}}$ e di una parte stocastica $\vec{t}_{\mathrm{stoc}}$:

$$\vec{t} = \vec{t}_{\mathrm{det}} + \vec{t}_{\mathrm{stoc}} \tag{4.5}$$

Nel dettaglio, i contributi stocastici vengono considerati come processi random Gaussiani, di modo da poter utilizzare particolari proprietà sia delle distribuzioni Gaussiane che dei loro integrali, al fine di semplificare la formulazione della PTA likelihood stessa.

4.3.1 Effemeridi temporali

L'effetto sul TOA dovuto al passaggio di un'onda gravitazionale è in realtà talmente piccolo da essere generalmente sovrastato dalla componente deterministica e dai processi di rumore; di conseguenza, sarà piccola la differenza tra i parametri iniziali di miglior adattamento del modello di timing $\vec{\beta}_0$ e quelli che si otterrebbero includendo le onde gravitazionali $\vec{\beta}_{full}$. Di

conseguenza, è lecito linearizzare, tramite sviluppo in serie di Taylor, le effemeridi temporali deterministiche intorno ai $\vec{\beta}_0$, trattando quindi i processi di rumore e segnali di GW come deviazioni lineari. Il vettore deterministico completo può perciò essere scritto in modo compatto come $\vec{t}_{det}(\vec{\beta}) = \vec{t}_{det}(\vec{\beta}_0) + \boldsymbol{M}\vec{\epsilon}$, dove $\boldsymbol{M}$ è la *design matrix* le cui entrate sono le derivate parziali dei TOA rispetto a ciascun parametro dell'effemeride temporale, mentre $\vec{\epsilon}$ è il vettore dato dalla differenza dei parametri lineari dalla soluzione di adattamento iniziale.

4.3.2 Processi acromatici a bassa frequenza

Le pulsar possono possedere delle instabilità intrinseche che causano comportamenti simili a un random walk nella fase dell'impulso, nel periodo o nel tasso di spindown, che risultano in un rumore su lunga scala temporale [19]: spesso viene definito *red noise* proprio perché la sua potenza si concentra maggiormente nelle basse frequenze dei residui temporali.

Esso, insieme ad altri processi a bassa frequenza che non hanno dipendenza dalla radio-frequenza quale il GWB, viene caratterizzato usando una base di Fourier e scritto in forma compatta mediante un vettore che contiene i coefficienti di Fourier $\vec{a} = (a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{N_f}, b_{N_f})^{\mathrm{T}}$ e una *design matrix* di Fourier $\boldsymbol{F}$ come $\vec{t}_{red} = \boldsymbol{F}\vec{a}$, in cui però vengono considerati solo gli N_f contributi armonici a bassa frequenza.

Questi contributi acromatici di red noise vengono modellizzati come processi random Gaussiani a media zero:

$$p(\vec{a}|\vec{\eta}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\ \vec{a}^T\boldsymbol{\phi}^{-1}\vec{a})}{\sqrt{det(2\pi\boldsymbol{\phi})}} \tag{4.6}$$

dove $\langle \vec{a}\ \vec{a}^T \rangle = \boldsymbol{\phi}$, e $\vec{\eta}$ rappresenta gli iper-parametri che definiscono la varianza gaussiana di tali processi. La matrice di covarianza dei coefficienti di Fourier includerà quindi qualunque processo acromatico a bassa frequenza, comprendendo sia l'eventuale segnale di fondo di onde gravitazionali sia altre sorgenti di rumore spazialmente correlato. Essa può essere espressa come:

$$[\phi]_{(ak)(bj)} = \Gamma_{ab}\rho_k\delta_{kj}\ + \kappa_{ak}\delta_{kj}\delta_{ab} \tag{4.7}$$

dove (a, b) indicano le pulsar, (k, j) rappresentano le frequenze di campionamento dei residui temporali, e Γ_{ab} è la *Overlap Reduction Function* (ORF) che, in presenza di un GWB, assume la forma della Hellings & Downs; in alternativa, nel caso di rumore rosso spazialmente correlato, Γ_{ab} descrive la funzione di correlazione incrociata tra le pulsar a e b.

In generale, la ORF può includere diverse correlazioni [13]: vi possono essere correlazioni di monopolo causate da correzioni dell'orologio, correlazioni di dipolo causate da errori nelle effemeridi del sistema solare o perfino assenza di correlazioni (CURN). Se sono però presenti correlazioni HD, allora si è in presenza di un GWB isotropico:

$$\Gamma_{ab}^{CURN} = \delta_{ab} \tag{4.8}$$

$$\Gamma_{ab}^{MON} = 1 \tag{4.9}$$

$$\Gamma_{ab}^{DIP} = \cos(\xi_{ab}) \tag{4.10}$$

$$\Gamma_{ab}^{HD} = \frac{1}{2}\delta_{ab} + \frac{3}{2}x_{ab}\ \ln x_{ab} - \frac{1}{4}x_{ab} + \frac{1}{2} \tag{4.11}$$

dove $x_{ab} = (1 - \cos(\xi_{ab}))/2$ e ξ_{ab} è l'angolo tra le pulsar a e b.

Riguardo i termini ρ_k, κ_{ak} in (4.7), essi sono entrambi legati alla *densità spettrale di potenza* $S(f)$ (PSD) dei ritardi temporali [19], ma nel primo caso indotto dal GWB o da processi a bassa frequenza con correlazione spaziale, mentre nel secondo caso dal red noise intrinseco alla pulsar, secondo la relazione:

$$\rho(f) = S(f)\Delta f \tag{4.12}$$

in cui $\Delta f = 1/T$ (e analogamente $\kappa_a(f)$).

La possibilità di poter modellizzare con ampia flessibilità la PSD di questi processi permette di assumere in entrambi i casi una dipendenza con legge di potenza dalla frequenza, tale che:

$$\rho(f) = \frac{h_c^2(f)}{12\pi^2 f^3}\frac{1}{T} = \frac{A_{gw}^2}{12\pi^2}\frac{1}{T}\left(\frac{f}{f_{\rm ref}}\right)^{-\gamma_{gw}} \mathrm{yr}^2, \qquad \kappa_a(f) = \frac{A_a^2}{12\pi^2}\frac{1}{T}\left(\frac{f}{f_{\rm ref}}\right)^{-\gamma_a} \mathrm{yr}^2 \tag{4.13}$$

in cui nella prima compare la *characteristic strain* $h_c(f) = A(f/f_{\rm ref})^\alpha$, l'ampiezza A_{gw} e l'indice spettrale $\gamma_{gw} \equiv 3 - 2\alpha$ del GWB, mentre nella seconda compaiono ampiezza A_a e indice spettrale γ_a del red noise intrinseco.

Nell'analisi dei processi acromatici a bassa frequenza, ciò che interessa studiare sono gli iperparametri, quali sono A e γ; ad esempio, nel caso in cui si è in presenza di un fondo di onde gravitazionali provenienti da SMBHB in orbita circolare, ci si aspetta che l'indice spettrale assuma valore $\gamma_{gw} = 13/3$ quando l'ampiezza A_{gw} è definita rispetto alla frequenza di riferimento $f_{\rm ref} = 1\ \mathrm{yr}^{-1}$.

4.3.3 White noise

Il *white noise*, al contrario del red noise, ha una densità di potenza spettrale piatta, ovvero uguale a tutte le frequenze di campionamento. Nell'analisi PTA, ci sono tre principali sorgenti di tale rumore:

rumore di radiometro & **EFAC:** Durante l'acquisizione, tutti gli impulsi osservati in un determinato intervallo temporale vengono prima de-dispersi e poi foldati sul periodo di rotazione della pulsar. Successivamente, il profilo medio risultante viene adattato a un modello di riferimento (ottenuto su scale temporali lunghe) per determinare il TOA. Per tenere conto di tutte le incertezze derivanti da questo fit — e non solo di quelle dovute al rumore di radiometro — si introduce un fattore di correzione moltiplicativo, detto *Extra FACtor* (EFAC), applicato separatamente a ciascun sistema strumentale:

$$\langle \eta_{i,\mu}\eta_{j,\nu}\rangle = F_\mu^2\sigma_i^2\delta_{ij}\delta_{\mu\nu} \tag{4.14}$$

dove $\eta_{i,\mu}$ è il ritardo temporale indotto dal white noise all' i-esima osservazione nel sistema μ, σ_i è l'incertezza del TOA dell'i-esima osservazione, e F_μ è l'EFAC per μ. Un valore di $F_\mu \approx 1$ indica che le incertezze stimate sui TOA sono consistenti con il rumore misurato, mentre valori significativamente diversi possono indicare sottostima o sovrastima delle incertezze.

EQUAD: Oltre al rumore di radiometro, possono essere presenti ulteriori contributi di white noise dovuti, ad esempio, a effetti strumentali non modellati. Questi vengono rappresentati dal termine additivo *Extra QUADrature* (EQUAD), che si somma in quadratura al termine EFAC:

$$\langle \eta_{i,\mu}\eta_{j,\nu}\rangle = F_\mu^2\sigma_i^2\delta_{ij}\delta_{\mu\nu} + Q_\mu^2\delta_{ij}\delta_{\mu\nu} \tag{4.15}$$

dove Q_μ è l'EQUAD del sistema μ, anch'esso applicato al singolo sistema strumentale.

jitter di fase & **ECORR:** Poichè un numero finito di impulsi, appartenenti a un determinato tempo di acquisizione, viene adattato al modello standard del profilo dell'impulso, si ha l'ulteriore effetto di white noise, propriamente detto *jitter di fase* dell'impulso . Questo jitter sarà inoltre correlato tra le bande di frequenza osservate nello stesso intervallo temporale: il termine risultante è l'*Extra Correlated* (ECORR). Per questo, sia jitter che ECORR possono essere modellati come un ulteriore termine di white noise nel seguente modo:

$$\langle \eta^J_{i,\mu} \eta^J_{j,\nu} \rangle = J^2_\mu \delta_{e(i)e(j)} \delta_{\mu\nu} \tag{4.16}$$

Con $e(i)$ identifica gli intervalli di osservazione in modo che $\delta_{e(i)e(j)}$ sia nullo quando i TOA appartengono a intervalli diversi.

4.3.4 La likelihood marginale

A questo punto è possibile comporre il modello di PTA likelihood. Innanzitutto i residui temporali possono essere composti come somma dei contributi di rumore precedentemente trovati:

$$\delta\vec{t} = \boldsymbol{M}\vec{\epsilon} + \boldsymbol{F}\vec{a} + \vec{n} \tag{4.17}$$

dove $\vec{n}$ racchiude i contributi di white noise. Si può ora definire un nuovo vettore di residui temporali, ottenuto sottraendo dalle misure sia le correzioni ai parametri deterministici, sia le componenti modellate di segnale o rumore, in modo da ottenere una stima dipendente da $\vec{n}$. Tale vettore $\vec{r} = \delta\vec{t} - \boldsymbol{M}\vec{\epsilon} - \boldsymbol{F}\ \vec{a}$ rappresenta la stima del white noise Gaussiano, per il quale la likelihood risulta di forma semplice:

$$p(\vec{r}|\vec{\epsilon}, \vec{a}, ..., \vec{\eta}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\vec{r}^T \boldsymbol{N}^{-1}\vec{r})}{\sqrt{det(2\pi\boldsymbol{N})}} \tag{4.18}$$

dove $\vec{\eta}$ sono gli iper-parametri EFAC, EQUAD, ECORR, contenuti nella matrice di covarianza $\boldsymbol{N}$ del white noise. Per comodità si raggruppino i processi cosicché risulti $\vec{r} = \delta\vec{t} - \boldsymbol{T}\vec{b}$ dove $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{F}]$, e $\vec{b} = \begin{bmatrix}\vec{\epsilon}\\ \vec{a}\end{bmatrix}$.

Trattandosi rumore e segnale di GW di realizzazioni stocastiche [19], le vere grandezze d'interesse non sono tanto gli N_p coefficienti $\vec{a}$, quanto le proprietà statistiche di questi processi; per questo, si può integrare su essi, di modo da ottenere una likelihood marginale funzione dei soli iper-parametri. Prima di procedere, è importante definire $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$, in cui $\boldsymbol{B}$ è la matrice di covarianza di $\vec{b}$, di modo da poter usare l'identità di Woodbury che semplifica l'inversione della matrice $\boldsymbol{C}$:

$$\boldsymbol{C}^{-1} = (\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1} - \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{T}\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1} \tag{4.19}$$

dove $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{T}$, che permette di ridurre notevolmente il peso computazionale. Utilizzando quindi le proprietà di integrazione delle distribuzioni Gaussiane concatenate, si arriva alla seguente forma compatta della likelihood marginale:

$$p(\{\delta\vec{t}\}|\vec{\eta}) = \int p(\{\delta\vec{t}\}|\{\vec{b}\}, \vec{\eta})\mathrm{d}^{N_p}\vec{b} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\delta\vec{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\delta\vec{t})}{\sqrt{det(2\pi\mathbf{C})}} \tag{4.20}$$

L'equazione (4.20) viene quindi implementata con (4.19) all'interno dei pipeline di ricerca di GW, quale Enterprise (Enhanced Numerical Toolbox Enabling a Robust PulsaR Inference SuitE). Con questa likelihood marginale, si utilizzano tutte le tecniche numeriche bayesiane, compresa la *parameter estimation* del rumore e del segnale di onde gravitazionali, così come il *model selection*.

Attualmente, la ricerca è focalizzata sul confronto tra il modello che indica un segnale GWB spazialmente correlato con quello che si riferisce a un segnale *common-spectrum red process* non correlato spazialmente. Ciò che rende diversi i due modelli risiede nel fatto che la presenza di un fondo di onde gravitazionali induce una correlazione inter-pulsar descritta dalla funzione di Hellings & Downs, a cui perciò si fa riferimento come l'impronta inequivocabile dell'influenza delle GW sui PTA.

Capitolo 5

15yr Data Set di NANOGrav

Il set di *pulsar timing* di 15 anni (NG15) raccolto dal North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav) è ad oggi uno degli esperimenti principali di PTA, sensibile quindi a onde gravitazionali a bassa frequenza. Esso contiene misurazioni provenienti da 68 pulsar, raccolte nell'arco di tempo che va da luglio 2004 ad agosto 2020 presso l'osservatorio di Arecibo (Arecibo), il Green Bank Telescope (GBT) e il Very Large Array (VLA). Nel dettaglio, NG15 estende i già noti dati di 47 pulsar appartenenti al set di 12.5 anni con ulteriori 2.9 anni di osservazioni di 20 nuove pulsar, e mostra evidenze consistenti con la presenza di un fondo di onde gravitazionali [2], che segue il pattern di Hellings–Downs. In questo capitolo, vengono illustrati i principali risultati ottenuti, riprodotti facendo uso dei tutorial forniti da NANOGrav [9], [8], oltre che del cluster dell'Osservatorio Astronomico di Cagliari (OAC). Si specifica come siano stati eseguiti nuovamente tutti i campionamenti, senza fare uso dei risultati pre-campionati invece utilizzati nei tutorial di NANOGrav.

5.1 Parameter estimation

I principali pacchetti utilizzati in questo lavoro [13] includono: `Enterprise`, un pacchetto Python sviluppato per analizzare il rumore intrinseco delle pulsar e il modello di timing, cercando segnali di GW nei dati PTA. Consente di specificare modelli probabilistici dei dati PTA e di valutare le corrispondenti priors e likelihoods; `enterprise_extensions`, invece, contiene modelli pre-costruiti, comunemente usati nelle analisi PTA. Include anche *hypermodels* usati nella selezione del modello Bayesiano attraverso il *product-space sampling*; si utilizza `PTMCMCSampler` per approssimare il posterior dei modelli costruiti con `Enterprise`; infine, una volta completato il campionamento, si utilizza `la_forge` per comprimere e post-processare la catena risultante.

5.1.1 Parametri acromatici a bassa frequenza

Il red noise può includere sia componenti di rumore intrinseco della pulsar, sia un fondo di onde gravitazionali [13]. Assumendo che esso abbia la forma di una legge di potenza, ogni pulsar introduce un parametro di indice spettrale γ e un parametro di ampiezza A (in logaritmo), per ciascuno dei quali, separatamente, si utilizza lo stesso prior *uniform*. Analogamente, ci saranno due parametri A_{gw} e γ_{gw} dal GWB, anche in questo caso con prior *uniform*. I priors sono infatti scelti specificatamente basandosi sul Data Set precedente di 12.5 anni. Enterprise include *factories* che costruiscono modelli per componenti di rumore comunemente usati [13], come `FourierBasisGP` (per processi gaussiani con base di Fourier in seno/coseno). Per il rumore intrinseco risulta utile considerare un limitato intervallo di frequenze, dopo il quale il rumore della pulsar inizia a essere dominato dal white noise: utilizzando frequenze $f_i = i/T$, in cui $T = 15\ yr$ è il tempo totale di osservazione, facendo variare $i = 1 - 30$ si copre un intervallo

$f = 2 - 59$ nHz. Inizialmente si assume che questo red noise non sia correlato tra pulsar.

Per il GWB, al contrario che nel red noise intrinseco, si cerca nell'intervallo di frequenze inferiori a 28 nHz [13], in corrispondenza del quale inizia a prevalere il white noise. Viene quindi ridotto il numero di frequenze (*bin*) da 30 a 14.

```
log10_A = parameter.Uniform(-20, -11)
gamma = parameter.Uniform(0, 7)
pl = utils.powerlaw(log10_A=log10_A, gamma=gamma)
rn = gp_signals.FourierBasisGP(spectrum=pl, components=30, Tspan=Tspan)

log10_A_gw = parameter.Uniform(-18, -12)('log10_A_gw')
gamma_gw = parameter.Uniform(0, 7)('gamma_gw')
cpl = utils.powerlaw(log10_A=log10_A_gw, gamma=gamma_gw)
curn = gp_signals.FourierBasisGP(spectrum=cpl, components=14, Tspan=Tspan, name='gw')
```

5.1.2 Parametri di white noise

I parametri del white noise vengono definiti inizialmente come oggetti costanti tramite la classe *Constant*, inizializzati a valori numerici in un secondo momento. Nel modello del segnale, il white noise viene incluso attraverso specifiche factories fornite da Enterprise, come `MeasurementNoise` (che modella il rumore di radiometro e strumentale, EFAC e EQUAD) e `EcorrKernelNoise` (che modella il rumore di jitter correlato tra sottobande osservate nello stesso intervallo temporale):

```
efac = parameter.Constant()
t2equad = parameter.Constant()
ecorr = parameter.Constant()

mn = white_signals.MeasurementNoise(efac=efac, log10_t2equad=t2equad, selection=selection)
ec = white_signals.EcorrKernelNoise(log10_ecorr=ecorr, selection=selection)
```

5.1.3 Modello di timing

Infine, il modello di timing include una previsione sui tempi di arrivo dell'impulso, stabilizzato tramite `use_svd=True`.

Per tener conto delle incertezze associate al modello di timing, esistono due metodi di marginalizzazione analitica: `MarginalizingTimingModel`, costituito da due passaggi (più veloce quando non si variano i parametri di white noise) e `TimingModel`, che invece marginalizza in un solo passaggio:

```
tm = gp_signals.MarginalizingTimingModel(use_svd=True)
```

In questo modo, l'analisi si concentra esclusivamente sui processi stocastici residui (rumore bianco, rumore rosso e segnali correlati come il GWB).

5.1.4 Creazione del modello completo

L'oggetto principale di Enterprise è `PTA`, costruito a partire da una sequenza di `SignalCollection`, ciascuna corrispondente a una pulsar dell'array. Ogni `SignalCollection` contiene un oggetto `Pulsar` e un insieme arbitrario di oggetti `Signal`, che rappresentano le diverse componenti del modello dati della pulsar, comprendendo sia segnali deterministici sia contributi di rumore [13].

```
s = tm + mn + ec + rn + curn

models = []

for p in psrs:
    models.append(s(p))

pta = signal_base.PTA(models)
```

5.1.5 Distribuzione a posteriori

Si procede alla stima dei parametri A_{gw} e γ_{gw} mediante analisi bayesiana, campionando dalla distribuzione di probabilità congiunta (*joint posterior*) dei parametri del modello di GWB tramite la tecnica del *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Le distribuzioni marginali dei singoli parametri si ottengono considerando solamente il parametro di interesse all'interno della catena campionata.

Per campionare lo spazio dei parametri ad alta dimensionalità tipico delle analisi PTA, si utilizzano le *proposal distributions* di default incluse in PTMCMCSampler. Per verificarne la correttezza, si esegue un test in cui la likelihood viene impostata uguale al prior, con quest'ultimo reso costante. In questo scenario, se le *proposal distributions* soddisfano la condizione di *detailed balance*, il posterior teorico coincide con il prior, e un campionamento corretto dovrebbe ricostruire tale distribuzione entro le fluttuazioni statistiche. Il campionamento stocastico consente di approssimare la distribuzione a posteriori come il prodotto tra likelihood e prior; come consuetudine in ambito statistico, si lavora con log-likelihood e prior.

```
x0 = np.hstack([p.sample() for p in pta.params])
sampler = ee_sampler.setup_sampler(pta, outdir=outDir)
N = int(5e6)
sampler.sample(x0, N, SCAMweight=30, AMweight=15, DEweight=50, )
```

La *diagnostica di Gelman-Rubin* $\hat{R}$ [13] rappresenta un metodo per verificare la stazionarietà della catena, dividendo la catena MCMC in più parti e confrontando statistiche intra- e inter-catena per confermare che essa sia in uno stato stazionario. Questo non implica necessariamente che siano convergenti, ma che i campioni provengono da una stessa regione dello spazio dei parametri. La soglia richiesta che ne stabilisce la stazionarietà ricade nei valori tali per cui $\hat{R} < 1.01$. Questa diagnostica è implementata in la_forge tramite `grubin`. Nella figura seguente

è mostrato il valore assunto da $\hat{R} - 1$ durante tutto il campionamento, effettuato all'inizio dell'analisi:

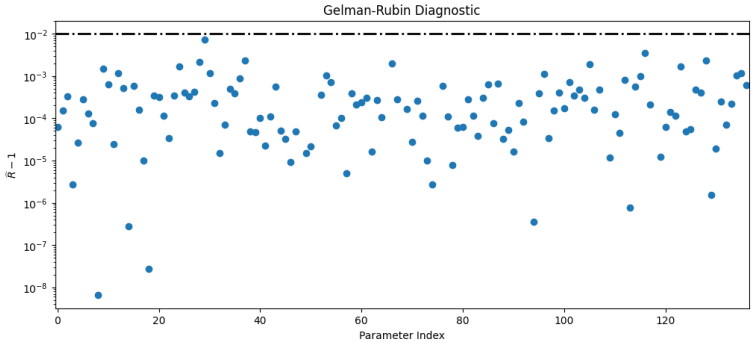


Figura 5.1: Esito della diagnostica di Gelman-Rubin $\hat{R}$, in cui compare il valore $\hat{R} - 1$ in funzione dei parametri del modello. La retta tratteggiata rappresenta il valore di soglia.

Per analizzare le correlazioni tra i parametri nella distribuzione a posteriori si utilizza un *corner plot* [19], in cui le distribuzioni marginali unidimensionali dei parametri sono poste lungo la diagonale, mentre la distribuzione bidimensionale congiunta occupa le posizioni centrali:

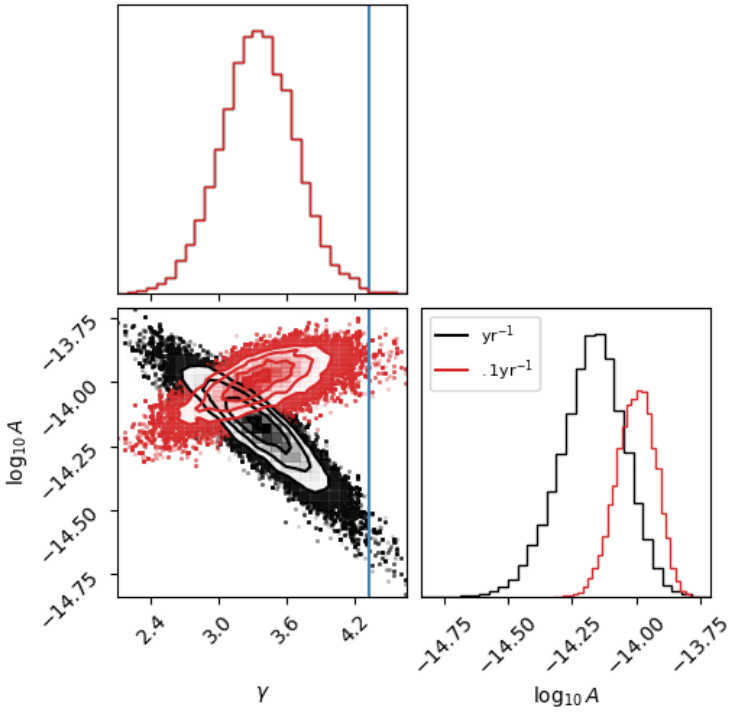


Figura 5.2: Distribuzioni a posteriori marginali dei parametri $\log_{10} A_{gw}$ (in basso) e γ_{gw} (in alto), poste nella diagonale del corner plot, con la distribuzione a posteriori congiunta posta al centro, avente regioni di confidenza al 68.3%, 95.4% e 99.7%. La curva rossa indica la frequenza di riferimento 1 yr^{-1}, mentre quella nera 1/10 yr^{-1}. La linea blu verticale a $\gamma_{gw} = 13/3$ indica l'indice spettrale atteso per SMBHB in orbita circolare.

in cui appaiono le regioni di confidenza al $68.3\%, 95.4\%, 99.7\%$ delle distribuzioni, equivalenti a $1/2/3\sigma$ delle distribuzioni gaussiane (anche in due dimensioni). Tipicamente, la frequenza di riferimento è posta a 1/yr (curva rossa), ma in questo caso viene raffigurato anche 1/(10yr) (curva nera) per dimostrare come la correlazione tra l'ampiezza e l'indice spettrale scompaia fissando

f_{ref} a una frequenza più sensibile. Nel dettaglio, i PTA non sono sensibili a frequenze yr^{-1} a causa dell'adattamento nel modello di timing dei parametri di moto proprio e posizione della pulsar. La linea blu verticale a $\gamma = 13/3$ indica l'indice spettrale atteso per un insieme di binarie di buchi neri supermassicci (SMBHB) in orbita circolare che emettono onde gravitazionali.

I valori ottenuti risultano essere $\gamma_{\text{gw}} = \left(3.3^{+0.5}_{-0.6}\right)$ e $A_{\text{gw}} = \left(6.8^{+3.8}_{-2.8}\right) \times 10^{-15}$, con un intervallo di confidenza al 90%.

5.1.6 Analisi con spettro libero

Un altro modo comune di modellizzare la forma spettrale del GWB, oltre alla legge di potenza, è tramite uno spettro libero, che tratta l'ampiezza $S(h) = \rho(f)/\Delta f$ del GWB in ciascun bin di frequenza come parametro libero [3].

L'uso di un modello che consente a ciascun bin di frequenza di variare indipendentemente è noto come *free spectrum model*. In questo modello, i bin non sono influenzati in modo significativo da quelli adiacenti, e si utilizzano gli stessi 30 bin di frequenza sia per il GWB che per il red noise intrinseco [13]. In questa analisi vengono considerati sia il modello a legge di potenza sia il free spectrum model, al fine di confrontare quale modello sia favorito dai dati. Per rappresentare i risultati, è conveniente considerare la radice della PSD dei residui temporali indotti dal GWB. Dalla definizione $S(h) = \rho(f)/\Delta f$ e dalla legge di potenza che modella la varianza dei residui temporali $\rho(f)$, si ottiene in scala logaritmica la relazione lineare in $\log_{10} f$:

$$\log_{10}(\sqrt{S(h)}) = \frac{1}{2}\log_{10}[S(h)] = \frac{1}{2}\left[\frac{A_{gw}^2}{12\pi^2}\left(\frac{f}{f_{ref}}\right)^{-\gamma_{gw}}\right] \tag{5.1}$$

in cui vengono sostituiti i valori mediani di $\log_{10} A_{gw}$ e di γ_{gw} estratti dalle distribuzioni a posteriori, ottenendo così la legge di potenza mediana.

Per costruire un modello di spettro libero si utilizza enterprise_extensions, impostando il parametro `common_psd = spectrum`. Per valutare l'ampiezza del segnale in ciascun bin, si assume che provenga da un GWB e si utilizza la correlazione quasi-quadrupolare della Hellings–Downs per la matrice di covarianza (4.7), implementata in enterprise e enterprise_extensions come `orf`.

```
pta = model_general(psrs, noisedict=wn_params, common_components=30, tm_svd=True,
                    orf='hd', common_psd='spectrum', tm_marg=True)

Tspan = 505861299.1401644
freqs = np.arange(1,31)/Tspan

hd_samples = [hd_fs_core.get_param('gw_hd_log10_rho_{}'.format(ii)) for ii in range(30)]
median_log10_A = np.median(hd_pl_core.get_param('log10_A_gw'))
median_gamma = np.median(hd_pl_core.get_param('gamma_gw'))

pl_med = 0.5*np.log10((utils.powerlaw(f=np.repeat(freqs,2), log10_A=median_log10_A,
↪  gamma=median_gamma)))[::2]
```

Per la rappresentazione grafica si utilizza un *violin plot*, che mostra le distribuzioni a posteriori marginali della PSD per ciascun bin di frequenza. "Steli" più sottili dei violini indicano TOA più grandi a quelle frequenze, quindi maggiore evidenza del segnale.

Si ottiene il seguente risultato in cui, per chiarezza, vengono mostrati solo i primi 10 bin di frequenza:

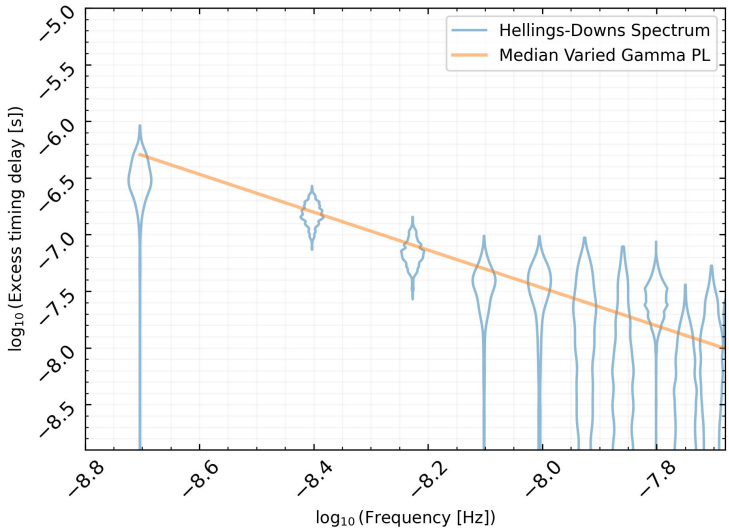


Figura 5.3: Radice della PSD $\sqrt{S(h)}$ dei residui temporali in funzione della frequenza del segnale, entrambi in scala logaritmica. La retta arancione rappresenta la legge di potenza mediana costruita con *median_ log10_ A* e *median_ gamma*, mentre i violini azzurri indicano i posterior marginali di $\sqrt{S(h)}$ per ciascun bin indipendente, assumendo correlazione Hellings–Downs.

La retta arancione rappresenta il modello di legge di potenza mediana del segnale, mentre i violini azzurri indicano i posterior marginali a un dato bin di frequenza del parametro $\sqrt{PSD}$ indipendente, per un processo stocastico correlato con Hellings-Downs.

5.2 Adattamento ORF a spline

Per verificare un pattern di correlazione di Hellings–Downs, si è ricostruita la funzione di correlazione tra pulsar, utilizzando un'interpolazione *spline* su sette nodi *spline-knot*. La scelta di tali nodi è basata sulle caratteristiche del pattern di Hellings–Downs atteso: due corrispondono alle separazioni angolari massima e minima (0° e 180° rispettivamente), due sono scelte nei punti teorici di annullamento del pattern di Hellings–Downs (49.2° e 121.8°), uno è al minimo teorico (82.5°), e gli ultimi due sono posizionati tra i punti estremi e gli zeri (25° e 150°), per garantire maggiore flessibilità nel fit.

Per realizzarlo è stato quindi applicato il processo opposto a quello descritto nella sezione Analisi con spettro libero: assumendo un modello di legge di potenza a esponente variabile per la varianza dei residui temporali $\rho(f)$, il termine della matrice di covarianza (4.7) relativo alla correlazione Γ_{ab} è stato parametrizzato tramite una *spline* a 7 nodi a separazioni angolari prefissate. Il valore verticale in ciascun nodo è stato lasciato libero di variare ed è stato campionato con PTMCMCSampler.

Si ottengono così le distribuzioni a posteriori marginali 1-D per ciascun nodo, con intervallo di confidenza al 68%:

```
pta = model_general(psrs, noisedict=wn_params, common_components=14, tm_svd=True,
                    orf='spline_orf', common_psd='powerlaw', tm_marg=True)

violins = [spline_core.get_param('gw_orf_spline_{}'.format(ii)) for ii in range(7)]

def hd_orf(xi):
    omc2 = (1 - np.cos(xi)) / 2
    return 1.5 * omc2 * np.log(omc2) - 0.25 * omc2 + 0.5
```

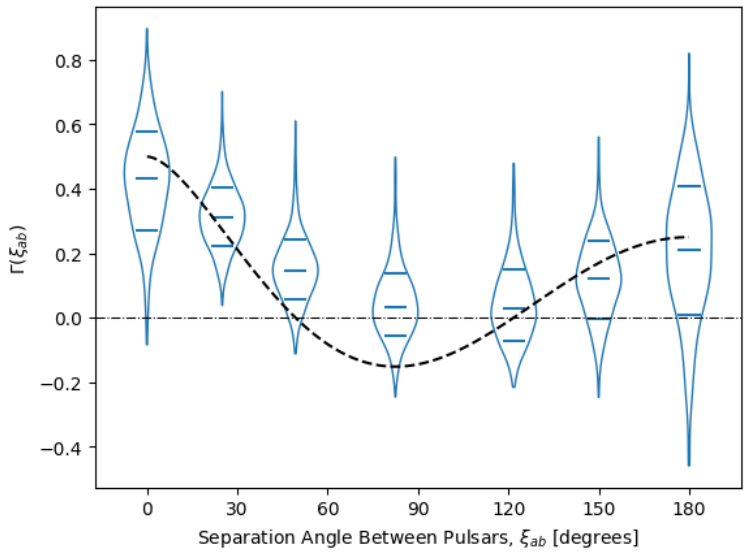


Figura 5.4: Posterior marginali della funzione di correlazione Γ_{ab} ottenuti mediante parametrizzazione *spline*, aventi intervallo di confidenza del 68% e rappresentati tramite violini blu. La retta tratteggiata grigia $y = 0$ indica assenza di segnale di GWB mentre la curva tratteggiata nera rappresenta il pattern teorico della Hellings & Downs.

5.3 Model Selection

Per quanto riguarda la selezione dei modelli, si considerano principalmente un processo di red noise comune `CURN` (ma non correlato) tra le pulsar, e un processo comune, correlato secondo Hellings–Downs tra tutte le pulsar `HD`.

Altre sorgenti, diverse dalle GW, possono però generare correlazioni tra residui inter-pulsar con pattern spaziali diversi da HD, quali errori negli effemeridi del Sistema Solare che creano ritardi di Römer dipolari, così come errori nella correzione del tempo del telescopio in un sistema inerziale che producono un ritardo monopolare identico per tutte le pulsar. Per questo motivo, si esplorano anche correlazioni spaziali di tipo monopolo e dipolo.

In aggiunta, è stata verificata la presenza di polarizzazioni alternative (Scalar Transverse, ST) nel fondo di onde gravitazionali come test di gravità alternativa, confrontate con il modello teorico costituito dalle due sole polarizzazioni tensoriali (*plus* e *cross*) che definiscono il modello HD.

5.3.1 Modelli di correlazione alternativi

L'analisi di un processo comune correlato rispetto a uno non correlato si effettua tramite la scelta del parametro `orf` nella costruzione del modello `pta`, denominati rispettivamente `hd` e `cnr`.

```
nmodels = 2
mod_index = np.arange(nmodels)

# Make dictionary of PTAs.
pta = dict.fromkeys(mod_index)
pta[0] = models.model_general(psrs, noisedict=wn_params, common_components=14, tm_svd=True,
                              orf='crn', common_psd='powerlaw', tm_marg=True)
pta[1] = models.model_general(psrs, noisedict=wn_params, common_components=14, tm_svd=True,
                              orf='hd', common_psd='powerlaw', tm_marg=True)
```

Per confrontare più modelli, si utilizza il *product-space sampling*, implementato tramite la classe `HyperModel` del pacchetto enterprise_extensions. Questo approccio unisce più modelli in un'unica struttura, accorpando i parametri condivisi e attivando solo quelli rilevanti per il modello selezionato. Un parametro discreto `nmodel` indica quale modello è attivo in ciascun passo della catena, e la probabilità di selezione dipende dai valori del posterior calcolati.

Il fattore di Bayes può essere stimato contando quante volte ciascun modello è stato campionato. Per evitare che un modello sfavorito non venga campionato, si può applicare un peso costante alla log-likelihood; in questo caso, è stato utilizzato il valore noto di NANOGrav pari a 300.

```
super_model = hypermodel.HyperModel(pta, log_weights=[np.log(300), 0])
```

Dato il modo in cui i modelli sono stati costruiti, valori di `nmodel` superiori a 0.5 indicano il modello `HD`, mentre quelli inferiori si riferiscono al modello `CURN`.

```
curn_samples = len(c1.get_param('nmodel')[c1.get_param('nmodel') < 0.5])
hd_samples = len(c1.get_param('nmodel')[c1.get_param('nmodel') > 0.5])
```

Il BF corretto si ottiene moltiplicando per l'esponenziale del peso.

```
hd_samples / curn_samples * 300
```

Per l'incertezza sulle statistiche dei posterior marginali si adotta un approccio `bootstrap`: questo consiste nel ricampionamento dei campioni MCMC originali (con reinserimento), per generare nuovi set che agiscono come realizzazioni di campionamenti indipendenti. Si calcolano quindi

```
rng = np.random.default_rng()  # set up a random number generator

def bootstrap(core, num_reals=10_000):
    array = core.get_param("nmodel")
    new_nmodels = rng.choice(array, (len(array), num_reals))
    return new_nmodels
    num_reals = 10_000
new_nmodels = bootstrap(c1)

ors = np.zeros(num_reals)
for ii in range(num_reals):
    ors[ii] = (len(np.where((new_nmodels[:, ii] > 0.5) & (new_nmodels[:, ii] <= 1.5))[0]) /
               len(np.where((new_nmodels[:, ii] > -0.5) & (new_nmodels[:, ii] <= 0.5))[0]))
               ↪  * 300
np.mean(ors), np.std(ors)
```

le distribuzioni delle statistiche di interesse su questi set, da cui ricavare medie e deviazioni standard.

È possibile visualizzare il risultato con un istogramma della funzione di densità di probabilità PDF normalizzata, che in questo caso non è altro che la distribuzione di probabilità a posteriori di `nmodel`, che indica quale modello è stato preferito durante il campionamento. In maniera del tutto analoga, è possibile visualizzare la distribuzione a posteriori del fattore di Bayes ponendo la PDF in funzione di BF, ottenendo complessivamente:

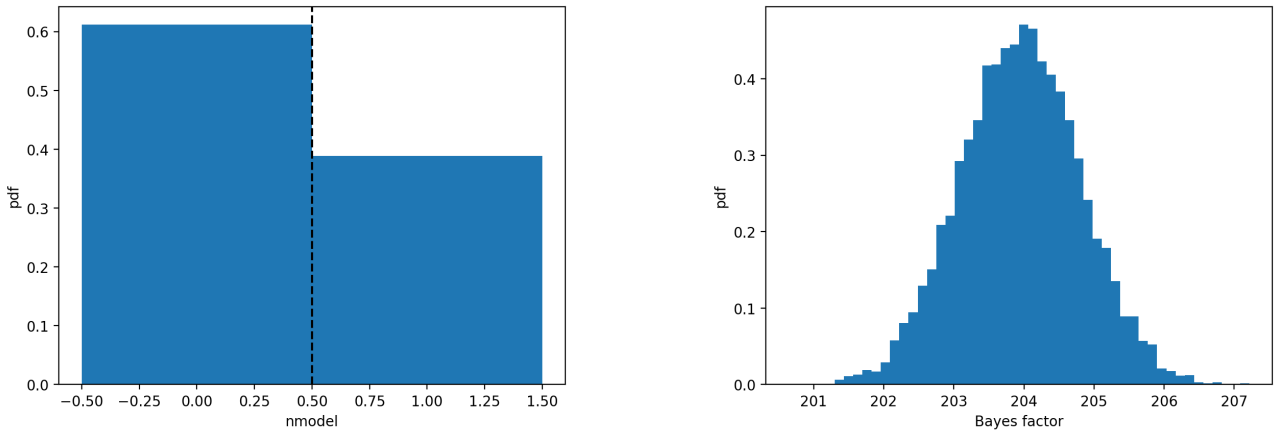


Figura 5.5: (a) Istogramma della distribuzione a posteriori del parametro indicatore di modello `nmodel`, con valori inferiori a 0.5 per CURN e superiori per HD. Una retta nera tratteggiata in corrispondenza di $nmodel = 0.5$ separa visivamente i due modelli; (b) Distribuzione a posteriori normalizzata del fattore di Bayes ottenuto dal confronto `HD vs CURN`.

In cui l'altezza di ciascuna barra dell'istogramma rappresenta quindi la frazione normalizzata di campioni della catena MCMC che hanno visitato il modello corrispondente, con il valore di soglia $nmodel = 0.5$ rappresentato mediante retta verticale tratteggiata. Allo stesso modo, si è ottenuta una distribuzione gaussiana del fattore di Bayes di `HD vs CURN`, con il massimo della densità di probabilità in corrispondenza di 203.9 ± 0.9.

Prima di procedere con la successiva analisi delle correlazioni, è stato necessario stimare il peso da applicare alle log-likelihoods riferite ai modelli di monopolo e di dipolo, essendo essi sfavoriti rispetto a HD; questo può essere ricavato in modo approssimativo sottraendo i valori massimi dei log-posterior dei due modelli posti a confronto [13]. Si è perciò proceduto con un breve campionamento, al fine di ottenere il massimo log posterior dei tre modelli `HD`, `HD+monopole` e `HD+dipole`; si riporta a titolo d'esempio il procedimento applicato per il confronto di `HD+monopole vs HD`:

```
max_lp_monopole = np.max(c1_monopole.get_param('lnpost'))
max_lp_hd = np.max(c1_hd.get_param('lnpost'))

print(f"Max logL monopole = {max_lp_monopole}")
print(f"Max logL HD = {max_lp_hd}")

peso = max_lp_hd  - max_lp_monopole

print(f"peso = {peso}")
```

Applicando lo stesso procedimento utilizzato per il confronto `HD vs CURN`, sono stati calcolati i fattori di Bayes per `HD+monopole vs HD` e `HD+dipole vs HD`, dividendolo in questo caso per l'esponenziale del peso applicato. Si precisa a tal proposito come, nella notazione adottata, il primo modello indicato nel confronto "vs" corrisponda sempre al numeratore nella definizione del BF. I risultati ottenuti sono 0.52 ± 0.01 per `HD+monopole vs HD`, e 0.45 ± 0.01 per `HD+dipole vs HD`.

5.3.2 Polarizzazioni alternative

Per verificare possibili deviazioni dalla relatività generale e testare teorie di gravità modificata, sono state ricercate polarizzazioni scalari trasversali (`ST`), sia considerate singolarmente sia in combinazione con le due polarizzazioni tensoriali standard previste dal modello di Einstein. L'analisi è stata condotta selezionando il parametro orf nei tre casi `HD`, `ST`, `HD+ST`, che ha portato a ottenere BF del valore di 2.69 ± 0.02 per `HD vs ST`, e 0.84 ± 0.04 per `HD+ST vs HD`.

Capitolo 6

Conclusioni

Per quanto riguarda la stima dei parametri, l'analisi delle distribuzioni a posteriori di γ_{GWB} e A_{GWB} ha permesso di valutare l'origine del fondo stocastico di onde gravitazionali (GWB), mostrando discrepanze in termini di σ dai valori riportati da NANOGrav in emtrambi i casi inferiori a uno, risultando compatibile con la natura astrofisica del GWB. Nonostante il buon accordo con i risultati pubblicati, l'analisi qualitativa della distribuzione unidimensionale a posteriori marginale di γ_{GWB} evidenzia come il valore teorico atteso si collochi al margine della distribuzione, pur rientrando nella regione di confidenza del 99%; in realtà, valori più bassi di γ_{gw} potrebbero derivare da effetti esterni in prossimità delle SMBHB o dall'eccentricità dell'orbita. Si può quindi affermare che il valore stimato sia compatibile con quello previsto $\gamma_{gw} = 13/3$ per una popolazione di sistemi binari di buchi neri supermassicci in un'orbita circolare, la cui evoluzione è dominata dall'emissione di onde gravitazionali, avendo ottenuto una discrepanza di 1σ. Per questo motivo, dai risultati ottenuti, non si può però scartare l'ipotesi che il GWB sia di origine cosmologica. Da un punto di vista qualitativo, è possibile dedurre che la legge di potenza mediana ottenuta dai due parametri risulti essere compatibile col modello free spectrum ottenuto lasciando l'ampiezza del segnale $S(f)$ variabile e imponendo la correlazione HD, in quanto passante nelle zone centrali dei violini.

Uno degli esiti più significativi di questa analisi riguarda l'overlap reduction function, ottenuta e rappresentata tramite distribuzioni a posteriori marginali di Γ_{ab} con regioni di confidenza del 68%. L'andamento ricostruito segue da vicino quello previsto dalla curva di Hellings & Downs, con la curva teorica che attraversa il centro della maggior parte delle distribuzioni a posteriori. Tuttavia, persistono punti angolari con supporto meno robusto, in particolare in corrispondenza del primo zero teorico a 49.2° e del minimo previsto a 82.5°.

Il confronto tra modelli di rumore correlato spazialmente (HD) e non correlato (CURN) ha prodotto un fattore di Bayes di 203.9 ± 0.9, superiore di oltre un fattore 2 alla soglia di 100 comunemente considerata come evidenza decisiva, a favore del modello HD. Tale valore è in buon accordo con quello riportato da NANOGrav, con una discrepanza in σ di 0.6σ. Dal confronto `HD+monopole vs hd` e `HD+dipole vs HD` emergono dei fattori di Bayes tali da avere discrepanze rispettivamente di 0.4σ e 2.1σ; sebbene la discrepanza di quest'ultimo sia significativa, si può comunque affermare di aver ottenuto valori del BF coerenti in quanto entrambi minori dell'unità, che vedono favorito il modello `HD`.

L'analisi condotta per testare teorie alternative della gravità ha confermato la Relatività Generale, supportando il modello standard con sole due polarizzazioni tensoriali trasverse, con fattori di Bayes minori di 1 rispetto a modelli con la polarizzazione scalare aggiuntiva. In particolare, il confronto `HD vs ST` e `HD+ST vs HD` ha prodotto discrepanze di 4.8σ e 0.1σ rispetto ai risultati di NANOGrav.

Di seguito, si riporta una tabella riassuntiva del confronto dei risultati ottenuti in questo lavoro con quelli riportati da NANOGrav:

Grandezze	**Risultati ottenuti**	**Risultati NANOGrav**	**Discrepanze [σ]**
A_{gw}	$6.8^{+3.8}_{-2.8} \times 10^{-15}$	$6.4^{+3.2}_{-2.7} \times 10^{-15}$	0.1
γ_{gw}	$3.3^{+0.5}_{-0.6}$	$3.2^{+0.6}_{-0.6}$	0.1
$BF_{\text{(HD vs CURN)}}$	203.9 ± 0.1	202 ± 3	0.6
$BF_{\text{(monopole vs HD)}}$	0.52 ± 0.01	0.6 ± 0.2	0.4
$BF_{\text{(dipole vs HD)}}$	0.45 ± 0.01	0.48 ± 0.01	2.1
$BF_{\text{(HD vs ST)}}$	2.69 ± 0.02	2.2 ± 0.1	4.8
$BF_{\text{(HD+ST vs ST)}}$	0.84 ± 0.04	0.88 ± 0.4	0.1

Tabella 6.1: Confronto tra i valori ottenuti per l'ampiezza A_{gw} della PSD dei residui temporali, l'indice spettrale γ_{gw} e i fattori di Bayes BF, rispetto ai corrispondenti risultati di NANOGrav. Le discrepanze sono espresse in unità di σ.

Si precisa che, tra le possibili fonti di incertezza, non può essere trascurata la scelta del numero di passi iterativi utilizzati nei campionamenti MCMC; per ragioni di tempo, è stato infatti necessario ridurli rispetto al numero ottimale, con conseguenti possibili effetti sulla stabilità e sulla precisione delle stime.

Sebbene i risultati attuali non consentano ancora di affermare con certezza la rivelazione di un GWB, l'evidenza raccolta finora ne costituisce una forte indicazione. Ad oggi, l'obiettivo è migliorare l'attuale confidenza statistica della correlazione angolare ottenuta pari a 3σ fino al raggiungimento di una deviazione standard pari a 5σ, considerata la soglia che implicherebbe in maniera inequivocabile l'effettiva rivelazione di un fondo stocastico di onde gravitazionali.

La comunità scientifica ripone perciò fiducia nel miglioramento della sensibilità della tecnica di Pulsar Timing e nello sviluppo di nuovi strumenti osservativi già in fase di progettazione, che permetterebbero in futuro la conferma definitiva di questa scoperta.

Capitolo 7

Bibliografia

[1] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, Thomas D Abbott, Matthew R Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, Rana X Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.

[2] Gabriella Agazie, Md Faisal Alam, Akash Anumarlapudi, Anne M Archibald, Zaven Arzoumanian, Paul T Baker, Laura Blecha, Victoria Bonidie, Adam Brazier, Paul R Brook, et al. The nanograv 15 yr data set: observations and timing of 68 millisecond pulsars. *The Astrophysical Journal Letters*, 951(1):L9, 2023.

[3] Gabriella Agazie, Akash Anumarlapudi, Anne M Archibald, Zaven Arzoumanian, Jeremy G Baier, Paul T Baker, Bence Bécsy, Laura Blecha, Adam Brazier, Paul R Brook, et al. The nanograv 15 yr data set: running of the spectral index. *The Astrophysical Journal Letters*, 978(2):L29, 2025.

[4] Joshua Albert, Csaba Balazs, Andrew Fowlie, Will Handley, Nicholas Hunt-Smith, Roberto Ruiz de Austri, and Martin White. A comparison of bayesian sampling algorithms for high-dimensional particle physics and cosmology applications. *arXiv preprint arXiv:2409.18464*, 2024.

[5] Cosimo Bambi, Stavros Katsanevas, and Konstantinos D Kokkotas. *Handbook of Gravitational Wave Astronomy*. Springer Nature, 2022.

[6] Sarah Burke-Spolaor, Stephen R Taylor, Maria Charisi, Timothy Dolch, Jeffrey S Hazboun, A Miguel Holgado, Luke Zoltan Kelley, T Joseph W Lazio, Dustin R Madison, Natasha McMann, et al. The astrophysics of nanohertz gravitational waves. *The Astronomy and astrophysics review*, 27(1):5, 2019.

[7] Chiara Caprini and Daniel G Figueroa. Cosmological backgrounds of gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 35(16):163001, July 2018.

[8] NANOGrav Collaboration. Model selection tutorial, 2023. `https://github.com/nanograv/15yr_stochastic_analysis/blob/main/tutorials/model_selection.ipynb`.

[9] NANOGrav Collaboration. Parameter estimation tutorial, 2023. `https://github.com/nanograv/15yr_stochastic_analysis/blob/main/tutorials/parameter_est.ipynb`.

[10] Jolien DE Creighton and Warren G Anderson. *Gravitational-wave physics and astronomy: An introduction to theory, experiment and data analysis*. John Wiley & Sons, 2012.

[11] Tiziana Di Matteo and Andrew King. *Black hole formation and growth*. Springer, 2019.

[12] Piotr Jaranowski and Andrzej Królak. *Analysis of gravitational-wave data*, volume 29. Cambridge University Press, 2009.

[13] Aaron D Johnson, Patrick M Meyers, Paul T Baker, Neil J Cornish, Jeffrey S Hazboun, Tyson B Littenberg, Joseph D Romano, Stephen R Taylor, Michele Vallisneri, Sarah J Vigeland, et al. Nanograv 15-year gravitational-wave background methods. *Physical Review D*, 109(10):103012, 2024.

[14] Duncan Ross Lorimer and Michael Kramer. *Handbook of pulsar astronomy*, volume 4. Cambridge university press, 2005.

[15] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Astrophysics and Cosmology*, volume 2. Oxford University Press, 2008.

[16] Michele Maggiore. *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*, volume 1. Oxford university press, 2008.

[17] ES Phinney. A practical theorem on gravitational wave backgrounds. *arXiv preprint astro-ph/0108028*, 2001.

[18] Sanjay Kumar Sahay. *Data Analysis of Gravitational Waves*. 2008.

[19] Stephen R Taylor. The nanohertz gravitational wave astronomer. *arXiv preprint arXiv:2105.13270*, 2021.